

УЧЕБНЫЕ ИЗДАНИЯ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

УЧЕБНИК

Под общей редакцией
доктора экономических наук, профессора
К. В. Балдина

«Дашков и К°»
Издательско-торговая корпорация

УДК 517 (0. 75.8)
ББК 22.16
К78

Авторы:

К. В. Балдин — доктор экономических наук, профессор;
Е. Л. Макриденко — кандидат экономических наук;
А. В. Рукосуев — старший преподаватель.

Рецензенты:
И. В. Минаев — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ;
А. И. Данилов — доктор экономических наук, профессор.

К78 **Краткий курс высшей математики** : учебник для бакалавров / [К. В. Балдин, Е. Л. Макриденко, А. В. Рукосуев] ; под общ. ред. д. э. н., проф. К. В. Балдина. — 5-е изд. — Москва : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2021. — 510 с.

ISBN-978-5-394-04146-4.

Настоящий учебник содержит систематизированное изложение основ математики и написан на базе лекционных курсов, которые авторы преподавали в ряде вузов столицы.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям.

Сертификат соответствия № РОСС RU.AB51.HO5316
Подписано в печать 04.09.2020. Формат 60 × 84 1/16.
Печ. л. 32. Тираж 100 экз. Заказ №
Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°»
129347, Москва, Ярославское шоссе, д. 142, к. 732
Тел.: 8 (495) 668-12-30, 8 (499) 183-93-23
E-mail: sales@dashkov.ru — отдел продаж;
office@dashkov.ru — офис; http://www.dashkov.ru

ISBN-978-5-394-04146-4

© Коллектив авторов, 2009
© Оформление. ООО «ИТК «Дашков и К°», 2021, с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 9

Глава 1. Основы дискретной математики 12

1.1. Основы теории множеств 12

1.2. Основные понятия комбинаторики 26

1.3. Основы теории графов 29

1.4. Некоторые сведения из математической логики 59

Задачи для самостоятельного решения 66

Вопросы для самопроверки 67

Глава 2. Элементы линейной и векторной алгебры 69

2.1. Матрицы, определители и их свойства 69

2.2. Системы линейных алгебраических уравнений 90

2.3. Собственные числа, собственные векторы матриц и квадратичные формы 97

2.4. Некоторые сведения о векторах 106

Задачи для самостоятельного решения 119

Вопросы для самопроверки 121

Глава 3. Функции и пределы 123

3.1. Некоторые сведения о функциях 123

3.2. Предел последовательности. Предел функции. Вычисление пределов 136

3.3. Комплексные числа 150

Задачи для самостоятельного решения 152
Вопросы для самопроверки 154

Глава 4. Основы дифференциального исчисления 155

4.1. Производная первого порядка. Дифференциал. Производные высших порядков 155

4.2. Некоторые сведения о функциях многих переменных. Понятие о частной производной 166

4.3. Некоторые приложения дифференциального исчисления 176

4.3.1. Формула Тейлора 176

4.3.2. Правило Лопиталя 179

4.3.3. Асимптоты 182

4.3.4. Исследование функций с помощью производных первого и второго порядков, построение их графиков 186

4.3.5. Экстремумы функций двух и многих аргументов 197

4.3.6. Понятие о методе наименьших квадратов 202

Задачи для самостоятельного решения 205

Вопросы для самопроверки 207

Глава 5. Элементы интегрального исчисления 210

5.1. Первообразная и неопределенный интеграл 210

5.2. Определенный интеграл 233

5.3. Некоторые сведения о несобственных интегралах 242

5.3.1. Несобственный интеграл первого рода 242

5.3.2. Несобственный интеграл второго рода 247

5.4. Некоторые приложения определенного интеграла 251

5.4.1. Вычисление площадей плоских фигур 251

5.4.2. Нахождение длины дуги кривой 257
5.4.3. Объем тела вращения 260
5.5. Приближенное вычисление определенных интегралов 263
5.6. Понятие о двойном интеграле 269
5.7. Некоторые сведения о тройном интеграле 289
Задачи для самостоятельного решения 295
Вопросы для самопроверки 299

Глава 6. Некоторые сведения о дифференциальных уравнениях 301
6.1. Основные понятия и определения 301
6.2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка 302
6.2.1. Общие понятия 302
6.2.2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными 303
6.2.3. Однородные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным 307
6.2.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли 315
6.2.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 323
6.2.6. Уравнения Лагранжа и Клеро 326
6.3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка 331
6.3.1. Общие понятия 331
6.3.2. Дифференциальные уравнения второго порядка, решаемые с помощью понижения порядка 334

6.3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ... 339
6.3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ... 342
6.4. Понятие о системах обыкновенных дифференциальных уравнений ... 350
Задачи для самостоятельного решения ... 355
Вопросы для самопроверки ... 358

Глава 7. Ряды ... 360
7.1. Числовые ряды ... 360
7.2. Функциональные ряды ... 365
7.3. Степенные ряды ... 367
7.4. Некоторые приложения степенных рядов ... 370
7.4.1. Приближенное вычисление определенных интегралов ... 370
7.4.2. Приближенное решение дифференциальных уравнений ... 372
7.5. Понятие о рядах Фурье ... 374
Задачи для самостоятельного решения ... 378
Вопросы для самопроверки ... 379

Глава 8. Краткие сведения из теории вероятностей ... 381
8.1. Общие понятия и определения ... 381
8.2. Классификация событий ... 382
8.3. Алгебра событий ... 383
8.4. Вероятность события ... 385
8.5. Алгебра вероятностей ... 390

8.6. Случайные величины ... 394
8.7. Понятие о нормальном распределении ... 408
8.8. Системы случайных величин ... 411
8.9. Понятие о предельных теоремах ... 425
Задачи для самостоятельного решения ... 428
Вопросы для самопроверки ... 429

Глава 9. Задачи линейного программирования и методы их решения ... 431

9.1. Постановка задачи линейного программирвоания ... 431
9.2. Графический метод решения задач линейного программирования ... 433
9.3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования ... 440
9.3.1. Стандартная форма задач линейного программирования ... 440
9.3.2. Основные понятия симплекс-метода ... 442
9.3.3. Алгоритм симплекс-метода ... 445
9.3.4. Метод искусственных переменных ... 448
9.4. Двойственная задача линейного программирования ... 452
9.5. Анализ чувствительности задачи линейного программирования ... 458
9.6. Классификация методов решения задач целочисленного линейного программирования ... 463
9.7. Метод отсекающих плоскостей Гомори ... 465
9.7.1. Метод Гомори для полностью целочисленных задач ... 465
9.7.2. Метод Гомори для частично-целочисленных задач ... 470

9.8. Метод ветвей и границ 473
Задачи для самостоятельного решения 476
Вопросы для самопроверки 477

Глава 10. Специальные задачи линейного программирования 478

10.1. Вербальная и математическая постановка транспортной задачи линейного программирования 478

10.2. Решение транспортной задачи 482

10.3. Практическое решение задачи оптимального планирования 492

10.4. Многопродуктовая транспортная задача 499

10.5. Транспортная модель с промежуточными пунктами 503
Задачи для самостоятельного решения 506
Вопросы для самопроверки 507

Литература 508

Глава 1. ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1. Основы теории множеств

Начала теории множеств заложил в XIX в. немецкий математик Георг Кантор. Понятие множества является неопределенным, внешним по отношению к математике, поэтому точного определения оно не имеет.

Г. Кантору принадлежит высказывание, которое можно считать интуитивным определением математики: "Множество есть многое, мыслимое как единое". Это определение можно сформулировать несколько иначе. Множество — собрание различных объектов, которые различимы нашей интуицией. Данное определение множества требует введения трех символов. Первый символ должен представлять само множество. В качестве него мы будем использовать заглавные буквы латинского алфавита A, B, C, ... Второй символ — это элемент самого множества. Их мы будем обозначать маленькими буквами латинского алфавита, т. е. a, b, c ... . А третий символ должен однозначно сопоставить элемент самому множеству. В качестве этого символа применяют знак "$\in$", который является первой буквой греческого слова εtri (быть). Следовательно, запись $a \in A$, говорит о том, что элемент a принадлежит множеству A, а запись $b \notin B$, говорит о том, что элемент b не принадлежит множеству B.

Заметим, что множества могут быть любой природы. Так можно говорить о множестве всех студентов МГУ, о множестве всех ядерных боеголовок РФ, о множестве всех спиральных галактик нашей Вселенной и т. д. Однако дальнейшее развитие теории множеств, которое опиралось на его интуитивное определение, привело к ряду противоречий (парадоксов). Извест-

ный логический парадокс Рассела мы приводим в этом пункте. А о семантическом парадоксе лжеца рассказано в подразд. 1.4.

Заметим, что в логических парадоксах используют только понятия теории множеств, а в семантических парадоксах применяются такие понятия, как “характеризовать”, “истинный” и др., которые совсем не обязаны применяться в математическом языке. Поэтому логические парадоксы представляют куда большую угрозу для математиков, чем семантические.

Парадоксы теории множеств определились уже к началу XX в. Они показали, что построения, основанные на интуитивных определениях, не могут рассматриваться в математике как основополагающие. Поэтому надо определить множество так, чтобы затем при доказательствах теоретических построений не прибегать к интуитивным понятиям.

Выход из этой ситуации был найден в построении аксиоматической системы, которая бы опиралась на интуитивное определение множества, но затем не прибегала бы к нему в дальнейших определениях и доказательствах теорем.

К настоящему времени создано несколько аксиоматических систем теории множеств, которые в чем-то исключают, а в чем-то и дополняют друг друга. Одной из таких систем является система Цермело (Z-система), которая состоит из семи аксиом, причем их нумерация не во всех источниках совпадает. Приведем формулировки этих аксиом по книге [5].

Z1. Аксиома объемности.

Если все элементы множества X принадлежат также множеству Y, а все элементы множества Y принадлежат также множеству X, то данные множества равны.

Z2. Аксиома пары.

Для произвольных x и y существует множество, единственными элементами которого является x и y, т. е. $\{x; y\}$.

Z3. Аксиома суммы.

Для произвольных множеств X и Y существует единственное множество Z, элементами которого являются все элементы множества X и все элементы множества Y и которое никаких других элементов не содержит.

Z4. Аксиома степени.

Для любого множества A существует множество всех его подмножеств 2^A.

Z5. Аксиома выделения.

Путь A — произвольное множество, $a \in A$ и $F(a)$ — функция со значениями на множестве $\{0, 1\}$. В этом случае существует множество C, для которого $a \in C$.

Z6. Аксиома бесконечности.

Существует по крайней мере одно бесконечное множество — натуральный ряд чисел.

Z7. Аксиома выбора.

Для семейства X непустых непересекающихся множеств существует множество Y, имеющее только один общий элемент с каждым из множеств $P \in X$.

Следовательно, предполагается существование некоторой функции выбора φ, которая определяет получение единственного общего элемента с каждым из множеств семейства X.

Аксиому Z7 некоторые математики разделяют, а другие не признают.

Если все элементы множества X являются также элементами множества Y, то множество X есть подмножество множества Y. Это записывается следующим образом $X \subset Y$ или $Y \supset X$.

Множество всех подмножеств множества Y называется степенью этого множества и обозначается 2^y или $P(Y)$.

Множество X и Y являются равными (состоят из одних и тех же элементов) $X = Y$, если $X \subset Y$ или $Y \subset X$.

Чтобы подчеркнуть тот факт, что рассматриваемое множество X может совпадать с множеством Y, записывают $X \subseteq Y$.

Вводится понятия пустого множества ($\varnothing$), которое не содержит ни одного элемента. Например, множество решений уравнения $x^2 + 4 = 0$ есть пустое множество.

Способы задания множеств

а) Словесное описание.

Например, множество X есть множество всех прямых, проходящих через точку A плоскости α.

б) Перечисление элементов, входящих в множество.

Например, $X = \{-7, 0, 12, 123, 700\}$. Элементы в приведенном списке могут располагаться в любом порядке и должны быть различны, т. е. множества $X = \{5, 5, 7\}$ и $Y = \{5, 7\}$ равны между собой. Если во множестве есть совпадающие элементы, то его называют семейством $Z = (5, 9, 9, 12, 12, 23)$ и заключают в круглые скобки.

в) Описание свойств элементов, входящих в множество.

$X = \{x \mid [(x - 3)(x - 5)] > 0\}$, т. е. элементами множества X будут только те числа, которые удовлетворяют неравенству $(x - 3)(x - 5) > 0$.

Если обозначить через $Q(x)$ свойства элементов, входящих во множество X, то для задания этого множества в общем случае можно использовать следующую запись $X = \{x \mid Q(x)\}$, т. е. множество X состоит из тех элементов x, которые удовлетворяют свойству $Q(x)$. Множество, которое содержит все рассматриваемые в некоторой задаче множества, называется универсальным и обозначается U.

Например, в качестве U можно взять множество N (заметим, что в некоторых монографиях оно начинается не с единицы, а с нуля).

$$Z = \{z \in N \mid z < 6\}, \text{ т. е. } Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Для сокращения записи в математике используют кванторы всеобщности, существования, существования и единственности:

$\forall$ — квантор всеобщности (перевернутая первая буква английского слова *All*);

$\exists$ — квантор существования (перевернутая первая буква английского слова *Exists*);

$\exists!$ — квантор существования и единственности.

Например, запись $(\forall x \in X)\ P(x)$ означает: для всех x из множества X справедливо $P(x)$; запись $(\exists y \in Y)\ R(y)$ — существует y из множества Y такое, что справедливо $R(y)$; запись $(\exists! z \in Z)\ M(z)$ — существует единственное z из множества Z такое, что справедливо $M(z)$.

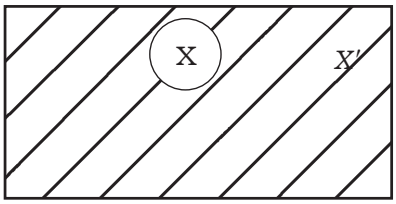
Операции над множествами

Пусть задано универсальное множество U. Множество всех его подмножеств есть 2^U. Заданы также множества X и Y, причем $X \in 2^U$ и $У \in 2^U$.

Дополнением множества X называется множество X' элементов множества U, которые не принадлежат X:

$$X' = \{x \in U \mid x \notin X\}.$$

Графически операции над множествами (рис. 1.1) можно изображать с помощью кругов Эйлера (диаграмм Венна):



U — изображается прямоугольником;
X — круг;
X' — заштрихованная область прямоугольника.

Рис. 1.1

Пересечение ($X \cap Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих обоим этим множествам (рис. 1.2).

Объединение ($X \cup Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и $У$ (рис. 1.3).

$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$

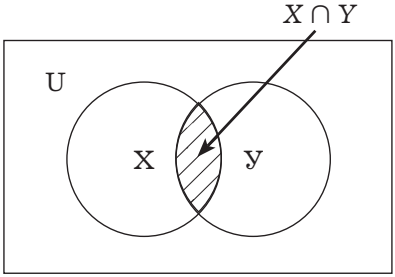


Рис. 1.2

$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$

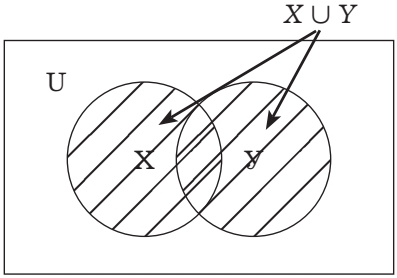


Рис. 1.3

Разность ($X \backslash Y$) двух множеств X и Y состоит из элементов, принадлежащих X, но не принадлежащих Y (рис. 1.4).

Аналогично определяется разность ($Y\backslash X$) множеств Y и X (рис. 1.5).

$X\backslash Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}$

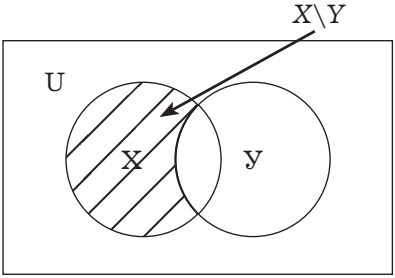


Рис. 1.4

$Y\backslash X = \{y \mid y \in Y \text{ и } y \notin X\}$

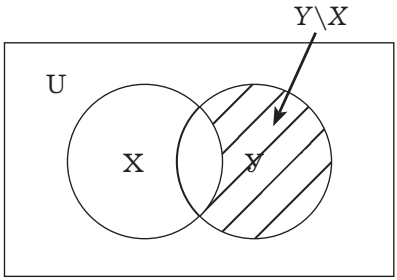


Рис. 1.5

Симметрическая разность ($X\Delta У$) множеств X и Y состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств X и Y (рис. 1.6):

$$X\Delta Y=(X\backslash Y) \cup (Y\backslash X)=(X \cup Y)\backslash(X \cap Y)$$

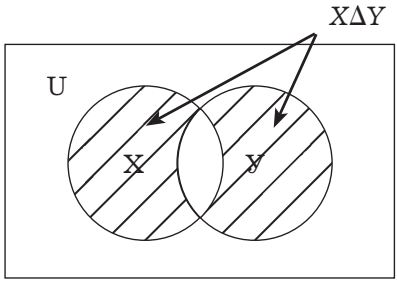


Рис. 1.6

Теперь рассмотрим конкретный числовой

Пример 1.0.

Дано множество: $X = \{-5, 0, 3, 17, 28, 33, 100\}$.

$Y = \{-7, 0, 5, 17, 33, 108\}$.

$X \cap Y = \{0, 17, 33\}$.

$X \cup Y = \{-7, -5, 0, 3, 5, 17, 28, 33, 100, 108\}$.

$X\backslash Y = \{-5, 3, 28, 100\}$.

$Y\backslash X = \{-7, 5, 108\}$.

$X\Delta Y = \{-7, -5, 3, 5, 28, 100, 108\}$.

Мощность множеств

Число элементов в конечном множестве X называют его мощностью и обозначают $|X|$ или $\#X$.

Например, $X = \{5, 12, 23, 111\}$, $|X| = 4$.

Если известны мощности множеств X и Y, то можно найти мощность их объединения по формуле:

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

В общем случае имеем:

$$\left| X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \right| = \sum_i \left| X_i \right| - \sum_{i<j} \left| X_i \cap X_j \right| + \sum_{i<j<k} \left| X_i \cap X_j \cap X_k \right| - \ldots$$

Для подсчета элементов в конечных множествах можно использовать комбинаторику.

Если между двумя множествами можно установить взаимно однозначное соответствие, то в них одинаковое количество элементов.

Взаимная однозначность показывает, что каждому элементу первого множества соответствует один элемент второго и наоборот.

Рассмотрим пример осуществления этого принципа.

Каких подмножеств больше у 100-элементного множества: мощности 60 или мощности 40.

Используем понятие числа сочетаний из n элементов по k (они отличаются только составом элементов) (более подробно в подразд. 1.2). Число сочетаний находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (читается n факториал).

В нашем случае имеем:

$$C_{100}^{60} = \frac{100!}{60!40!}; \quad C_{100}^{40} = \frac{100!}{40!60!}.$$

Поэтому у 100-элементного множества одинаковое количество подмножеств мощности 60 и 40 элементов.

Два множества называются равномощными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для конечных множеств это означает, что в них одинаковое количество элементов.

Но это определение годится и для бесконечных множеств. Например, отрезки [0,1] и [0,10] равномощны, так как отображение $x \to 10x$ дает нужное соответствие.

Можно также доказать, что интервал (0,1) и луч $(0, +\infty)$ равномощны. Искомое взаимно однозначное соответствие имеет вид $x \to \frac{1}{x} - 1$.

Так же доказывается, что множество бесконечных последовательностей цифр 0, 1, 2, 3 равномощно множеству бесконечных последовательностей цифр 0 и 1.

Тот факт, что множество X равномощно (эквивалентно) множеству Y записывается так: $X \sim Y$ ($|X| = |Y|$).

Множество называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел (N).

Например, множество целых чисел (Z) равномощно N, т. е. $Z \sim N$.

Доказывается:

1) подмножество счетного множества конечно или счетно;

2) всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

3) объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств конечно или счетно.

Множество действительных чисел (R) или множество бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. Мощность множества R больше мощности любого счетного множества и называется мощностью континуума.

Приведем без доказательства теорему Кантора—Бернштейна.

Если множество X равномощно какому-то подмножеству множества Y, а множество Y равномощно какому-то подмножеству множества X, то множества X и Y равномощны.

Дадим также общую формулировку теоремы Кантора.

Никакое множество Z не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Наглядные представления о множествах могут приводить к противоречиям.

Приведем, например, парадокс Рассела.

Типичные множества не являются своими элементами. Например, множество целых чисел (Z) само не является целым числом и не будет своим элементом. Но в принципе можно представить себе множество, которое является своим элементом, например, множество всех множеств (U). Такие множества назовем "необычными". Теперь рассмотрим множество всех обычных множеств. Если оно обычное, то является своим элементом и, следовательно, оно — необычное, и наоборот.

В принципе понятие "множество" не является непосредственно очевидным: разные люди (научные школы) могут понимать его по-разному.

Функции, прямые произведения, отношения

Сначала дадим традиционное определение функции.

Даны два множества X и Y. Функцией, которая определена на множестве X и принимает значение на множестве Y, называется закон (f), по которому каждому элементу x из множества X ($x \in X$) ставится в соответствие один элемент y из множества Y ($y \in Y$). Обычно это записывают в виде $y = f(x)$. Множество X есть область определения функции f, а множество $E = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X\ y = f(x)\} \subseteq Y$ — множеством значений функции f. Функцию f, определенную на множестве X и принимающую значения на множестве Y, обозначают так $f : X \to Y$.

Элемент $x \in X$ называется независимой переменной (аргументом), элемент $f(x)$ называется значением функции на элементе x.

Пусть задана однозначная функция f, т. е. различным значениям ее аргументов соответствуют различные значения функции $(\forall x_1 \in X)\ (\forall x_2 \in X)\ (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$. Знак "$\Leftrightarrow$" означает эквивалентность, например $A \Leftrightarrow B$ значит, что A эквивалентно B. (A тогда и только тогда, когда B).

Тогда $\forall y \in E$ может быть поставлен в соответствие единственный элемент $x \in X$, такой что $y = f(x)$ и который обозначается $x = f^{-1}(y)$. Это значит, что на множестве E определена функция $f^{-1}(y)$, которая принимает значения на множестве X и называется обратной к функции f. Если задана функция $f^{-1}(y)$: $E \to X$ и $Y = E$, т. е. когда множество значений функции f совпадает со всем множеством Y, функцию f называют взаимно однозначным соответствием между множествами X и Y.

Теперь сформулируем определение прямого или декартова произведения.

Прямым произведением множеств $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, $n \geq 2$ называется множество различных упорядоченных наборов (n-мерных векторов) $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3 ...$, $x_n \in X_n$, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n\} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in X_i, \forall i = \overline{1,n}\}$.

Заметим, что $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \neq X_n \times ... \times X_2 \times X_1$.

В том случае, если $X_i = X \; \forall i = \overline{1,n}$, то $X \times X \times ... \times X \equiv X^n$ ("$\equiv$" — тождественно равно) и называется n-й степенью множества X.

В частном случае, если имеется два множества X и Y, их прямым произведением будет множество различных упорядоченных наборов (двумерных векторов) (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$, обозначаемые $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Например, имеем два множества X={5, 6}, Y={ln3, ln7}.

$X \times Y$ = {(5, ln3), (5, ln7), (6, ln3), (6, ln7)}.

$Y \times X$ = {(ln3, 5), (ln7, 5), (ln3, 6), (ln7, 6)}.

т. е. $X \times Y \neq Y \times X$.

Теперь дадим определение отношения. Даны множества $X_1, X_2, ..., X_n$, $n \geq 1$; n-местным отношением между элементами множеств $X_1, X_2, ..., X_n$ называется любое подмножество ρ прямого произведения этих множеств, т. е. $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times, ..., \times X_n$. Если $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \rho$ говорят, что элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ связаны отношением ρ.

Если $X_i = X \; \forall i = \overline{1,n}$, $\rho \subseteq X^n$, говорят, что ρ есть n-местное отношение на множестве X.

Для одноместных, двухместных и трехместных отношений часто используют специальные названия: унарные, бинарные, тернарные соответственно, т. е.

$n = 1$ — унарное отношение $\rho \subseteq X_1$;

$n = 2$ — бинарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2$;

$n = 3$ — тернарное отношение $\rho \subseteq X_1 \times X_2 \times X_3$.

Если отношение совпадает с прямым произведением, оно называется полным, т. е. $\rho = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Рассмотрим конкретные примеры отношений.

Пример 1.1.

$X = \{1, 2, 7, 23, 35, 56\}$, $\rho = \{x \mid x \in X$ и $x < 23\}$, $\rho = \{1, 2, 7\}$, т. е. при $n = 1$ отношение ρ есть подмножество множества X.

Пример 1.2.

$X_1 = \{0, 1, 2\}$; $X_2 = \{5, 6, 7\}$;

$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_2 < 6\}$; $\rho = \{(0, 5), (1, 5), (2, 5)\}$.

Особый интерес представляют бинарные отношения, которые мы рассмотрим более подробно.

Если ρ есть отношение между элементами множеств X и Y, т. е. $\rho \subseteq X \times Y$, можно использовать запись $x \rho y$, т. е. x связано с y соотношением ρ.

Обратным к отношению $\rho \subseteq X \times Y$ называется отношение

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\} \subseteq Y \times X.$$

Геометрически понятие бинарного отношения показано на рис. 1.7.

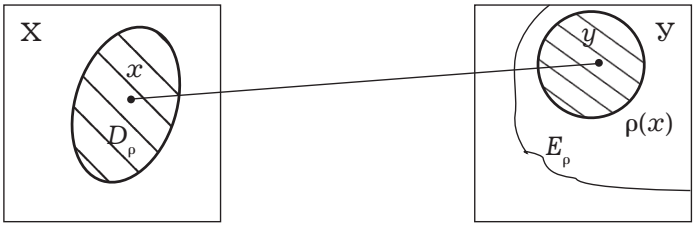


Рис 1.7

$D_\rho = \{x \mid x \in X, (xy) \in \rho\}$ — множество определения отношения $\rho \subset X \times Y$

$E_\rho = \{y \mid y \in Y, (xy) \in \rho\}$ — множество значений отношений $\rho \subset X \times Y$.

Заметим, что для $\rho^{-1} \subset Y \times X$ D_ρ и E_ρ поменяются местами. Точка x — элемент множества D_ρ, а множество $\rho(x)$ есть ρ-образ элемента x, а точка y является некоторым элементом из $\rho(x)$.

Отсюда видно, что бинарное отношение является многозначной функцией.

Заметим, что прямое произведение множества действительных чисел (R) само на себя $R \times R = R^2$ представляет собой систему координат на плоскости $x0y$.

Отношение $\rho \subseteq X \times Y \subseteq R^2$ является графиком отношения ρ.

Теперь рассмотрим конкретный пример бинарного отношения.

Пример 1.3.

Дано множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Найдем отношение ρ, если оно задано так:

$$\rho = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \text{ — } \textit{делитель } x_2, x_1 \leq 5\}.$$

Отношение ρ имеет вид.

$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (1,9), (1,10), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)\}$.

Теперь найдем множество определения и множество значений отношения ρ:

$$D_\rho = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E_\rho = X.$$

Представим полученное отношение ρ в графическом виде. Для этого зададим систему координат. Осью абсцисс будет D_ρ, а осью ординат E_ρ. По этим осям отложим элементы исходного множества X, затем соответствующие пары $(x_1 x_2)$ отметим точками и получим графическое изображение нашего отношения (рис. 1.8).

Бинарные отношения можно представить в виде графа (множества вершин и множества ребер, см. раздел “Основы теории графов”).

Вершинами будут элементы исходного множества X, а ребрами пары $(x_1 x_2)$. В данном случае важен порядок следования эле-

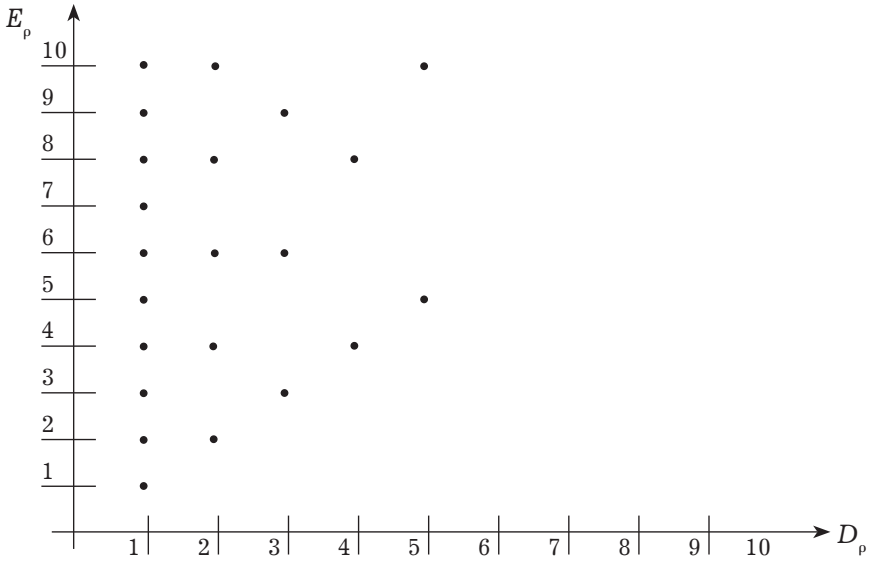


Рис. 1.8

ментов, поэтому ребра будут ориентированными (обозначим их стрелками). В результате получим следующий граф (рис. 1.9).

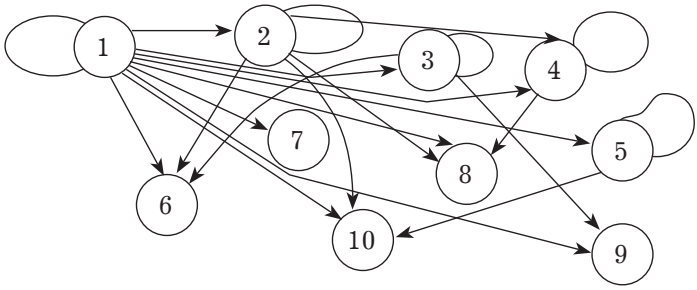


Рис. 1.9

В случае $x_1 = x_2$ получим петлю.

Наконец бинарное отношение можно представить в виде матрицы, т. е. прямоугольной таблицы размера $n \times m$, где n — количество строк, а m — количество столбцов. Например, если

имеем два множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ и бинарное отношение на элементах этих множеств $\rho \subseteq X \times Y = = \{(xy) \mid x \in X, y \in Y\}$, то этому отношению соответствует матрица размера $n \times m$, состоящая из нулей и единиц. Единицами обозначаются пары (xy), входящие в отношение ρ. (Более подробно о матрицах см. в главе 2 "Элементы линейной и векторной алгебры".)

В данном примере имеем отношение $\rho \subseteq X^2$, т. е. ему соответствует матрица размера 10×10, число строк и столбцов которой равно числу элементов в множестве X (рис. 1.10).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 1.10

В заключение рассмотрим функцию как отношение.

Отношение f между элементами множеств X и Y называется функцией, определенной на множестве X и принимающей значение на множестве Y, если

$$\forall x \in X \; \exists \, ! \; y \in Y \mid (x,y) \in f. \qquad (1.1)$$

В этом случае пишут $f: X \to Y$, а вместо $(x,y) \in f$ обычно пишется $y = f(x)$; y называют значением функции f на элементе x, так как для функциональных отношений в силу (1.1) f-образом одноэлементного множества $\{x\}$ будет одноэлементное множество $\{f(x)\}$.

Заметим, что (1.1) эквивалентно выполнению двух условий:

$$f^{-1}(Y) = X; \qquad (1.2)$$

$$y_1 = f(x) \text{ и } y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2. \qquad (1.3)$$

Иногда отношения называют функцией, если выполнено только условие (1.3), а если выполнено и условие (1.2), то *отображением.*

Часто слова функция и отображения используют как синонимы.

1.2. Основные понятия комбинаторики

Комбинаторика — часть математики, которая посвящена решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами, т. е. комбинаторика решает задачи выбора элементов из конечного множества и размещения этих элементов в каком-либо порядке.

Приведем правила сложения и умножения, которые применяются в комбинаторике.

Правило сложения. Если выбор каждого из объектов A_i ($i = \overline{1,k}$) можно сделать n_i способами, то выбор или A_1 или A_2, ..., или A_k можно произвести $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ способами.

Правило умножения. Если выбор каждого из k объектов B_i ($i = \overline{1,k}$) можно сделать m_i способами, то выбор и B_1, и B_2, ..., и B_k можно осуществить $N = \prod_{i=1}^{k} m_i$ способами.

Приведем конкретные примеры применения этих правил.

Пример 1.4. Из Москвы в Санкт-Петербург можно добраться самолетом, поездом, автобусом. Есть пять автобусных маршрутов, два авиамаршрута, один железнодорожный. Поэтому общее число маршрутов между Москвой и Санкт-Петербургом равно: $n = 5 + 2 + 1 = 8$.

Пример 1.5. Из пункта A в пункт B можно доехать по 5 дорогам, из B в C — по трем дорогам, а из C в D — по четырем дорогам (рис. 1.11). Сколькими способами можно проехать из A в D через B и C?

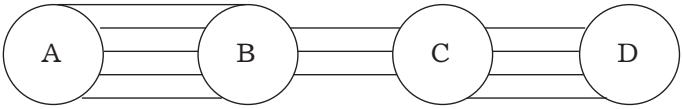


Рис. 1.11

По правилу произведения получаем $N = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$.

Размещения

Дано множество, состоящее из n элементов. Размещением из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое упорядоченное подмножество, содержащее m различных элементов исходного множества. Все эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения.

Обозначим размещения из n элементов по m

$$A_n^m = n(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-(m-1)) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

где $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ (читается n факториал).

Принимается, что $0! = 1$ и $A_0^0 = 1$.

Пример 1.6. В футбольной премьер-лиге РФ участвует 16 команд. Сколькими способами можно распределить три первых призовых места?

Так как в данном случае порядок команд имеет значение, то имеем дело с размещениями, т. е.

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{1\times2\times3\times\ldots\times16}{1\times2\times3\times\ldots\times13} = 14\times15\times16 = 3360.$$

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т. е.

$$(A_n^m)_{\text{повт}} = n^m.$$

Пример 1.7. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 5,6,7,8. $(A_4^3)_{\text{повт}} = 4^3 = 64$ трехзначных числа.

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов исходного множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов, т. е.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Пример 1.8. Расставить четыре книги на полки можно $P_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ способами.

Если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида, ..., n_i элементов i-го вида, то число перестановок с повторениями находится по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_i) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_i!}; \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_i.$$

Пример 1.9. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр: 2, 2, 3, 3, 4, 4. В данном случае $n = 6$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, т. е.

$$P_6(2,2,2) = \frac{6!}{2!2!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2} = 90.$$

Сочетания

Дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по m элементам ($0 \le m \le n$) называется любое подмножество, которое содержит m различных элементов исходного множества. Различными подмножествами считаются только те, которые отличаются по составу элементов.

Обозначив число сочетаний через C_n^m, получим

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1.10. В бригаде 25 человек. Надо найти четырех человек для работы в ночную смену. Сколькими способами это можно сделать.