Сергей
Самойленко

ВЕРОЯТНОСТИ И НЕПРИЯТНОСТИ

МАТЕМАТИКА ПОВСЕДНЕВНОЙ ЖИЗНИ

ЭВОЛЮЦИЯ

МИФ

Серия «Наука для всех»

Сергей Самойленко

Вероятности и неприятности

Математика повседневной жизни

Москва
«Манн, Иванов и Фербер»
2022

УДК 519.2
ББК 22.17
С17

Научный редактор Евгений Поникаров

Самойленко, Сергей Борисович

С17 Вероятности и неприятности. Математика повседневной жизни / Сергей Борисович Самойленко. — Москва : Манн, Иванов и Фербер, 2022. — 256 с. — (Наука для всех).

ISBN 978-5-00169-565-3

Книга познакомит вас с повседневными приложениями теории вероятностей и математической статистики, мягко вводя в мир нешкольной математики. Лейтмотивом изложения станут широко известные «законы Мёрфи», или «законы подлости», — несерьезные досадные закономерности, наблюдаемые каждый день, но имеющие, однако, объективное математическое обоснование. Кроме разнообразных примеров из области теории вероятностей, в книге немало говорится и о смежных разделах: теории мер, марковских цепях, стохастических процессах, теории очередей, динамическом хаосе и т. п.

Эта книга подойдет и школьнику, которому не терпится попасть в университет, и студенту, недоумевающему: «Куда я попал?», — и преподавателю, которому нужны оригинальные живые примеры, а также просто любопытному читателю, желающему развить навыки математического мышления, чтобы научиться отсеивать информационный шум и мусор в потоке новостей.

УДК 519.2
ББК 22.17

ISBN 978-5-00169-565-3

Оглавление

Введение

В далеком 1977 году в свет вышла книга, которую быстро начали разбирать на цитаты все кому не лень — от журналистов до ученых. Выдержки из нее превратились в «народную мудрость», стали появляться в заголовках газет и журналов и даже упоминаться в серьезных научных трудах. Однако сама по себе она ничему не учила, в ней не предлагалось новаторских методик, она не раскрывала глаза на какую-то «правду». В ней можно было найти только то, что хорошо известно всем на свете, и именно этим она подкупила читателя. Книга называлась «Закон Мёрфи и другие причины, почему все идет не так», а написал ее американский публицист Артур Блох*. Почему же некие «законы» пришлись по душе широкой публике? Потому что они относятся к повседневным неприятностям, досадным совпадениям, надоевшему несовершенству нашего мира. А мы, люди, очень любим жаловаться. Особенно когда жалобы «объективны». Иначе говоря, виноваты в неприятностях могут быть какие угодно обстоятельства, случайности или закономерности, но только не тот, кто жалуется, и не тот, кто его выслушивает.

В этой книге речь тоже пойдет о различных неприятностях. Привычных, ожидаемых и настолько предсказуемых, что они получили статус «законов». Их в книге Блоха и нами самими сформулировано великое множество, это и закон падающего бутерброда,

* Блох А. Закон Мёрфи. — Мн. : Попурри, 2005.

и закон Мёрфи*: *«Если какая-нибудь неприятность может произойти, она случится»*, — и законы Чизхолма, утверждающие: *«Когда все идет хорошо, что-то должно случиться в самом ближайшем будущем»*, и наблюдение Этторе: *«Соседняя очередь всегда движется быстрее»*. Бóльшая их часть вполне тривиальна, но, согласно закону Муира, *«Когда мы пытаемся вытащить что-нибудь одно, оказывается, что оно связано со всем остальным»*. Наша задача — найти рациональное зерно этих закономерностей. Не для того, чтобы с ними бороться, а для удовольствия. И поскольку при этом мы будем использовать математику, удовольствие будет своеобразным и полезным, в отличие от самого результата. Ну а если рассуждения заведут нас слишком далеко, можно взять на вооружение постулат Персига: *«Число разумных гипотез, объясняющих любое данное явление, бесконечно»*. Со всеми этими глубокомысленными фразами и законами мы и станем разбираться, опираясь на язык математики и по возможности строгие выкладки.

Современная математика — огромная страна со сложным «ландшафтом». В ней есть и цветущие долины, и древние памятники, развлекательные центры и пряничные городки, даже супермаркеты с готовыми решениями на все случаи жизни. Все это связано хорошо оборудованными дорогами с указателями и путеводителями. Но есть в математической стране и глухие участки с густыми непроходимыми лесами, горами и топкими болотами, через которые проходят внезапно исчезающие тропинки с шаткими мостиками гипотез и предположений. Наконец, она окружена неизведанными землями, куда если и осмеливался ступить человек,

* Первоисточником закона Мёрфи была не книга Блоха. В ней собраны многочисленные его следствия, но сам закон появился раньше. Блох приписывает его Эдварду Мёрфи, инженеру Лаборатории реактивного движения, так сформулировавшему закономерность в 1949 году: «Если что-то можно сделать неправильно, он так и сделает» (If there is any way to do it wrong, he will). В книге Анны Роу 1952 года формулировка «закона Мёрфи, или четвертого начала термодинамики» звучит так: «Если что-то может пойти не так, это пойдет не так» (If anything can go wrong it will), и она приписывается безымянному физику. Как позже установлено, это был физик Ховард Перси Робертсон, который дал интервью Роу в 1949 году. Однако близкие по смыслу формулировки существовали намного раньше. Например, в 1877 году британский инженер Альфред Холт писал: «Установлено, что, если что-нибудь может в море пойти неправильно, это рано или поздно пойдет неправильно» (It is found that anything that can go wrong at sea generally does go wrong sooner or later).

то лишь очень отважный и часто одинокий в своих поисках. Я не случайно так увлекся этой аллегорией. Она гораздо ближе к пониманию того, что такое наука, чем кажется на первый взгляд. Ведь в любом городе можно ходить по-разному от одной площади до другой, от одного здания к другому. Наконец, в любом городе по-разному можно жить.

Выходя на улицы родного города ребенком, вы изучаете правила перехода улиц, назначение тротуаров и магазинов, узнаёте первые надежные тропинки. Если уже взрослым вы впервые попадаете в новый интересный для вас город, то, скорее всего, выберете для ознакомления экскурсионный маршрут, который уже отработан годами и представляет собой своеобразное произведение искусства. Так за какие-нибудь пару часов вы получите яркие впечатления о городе, которые останутся с вами на всю жизнь. Но вы не сможете сказать, что узнали его по-настоящему. Быть может, вас туда занесет по работе — скажем, случится более или менее длинная командировка. Тогда неплохо удастся изучить основные полезные маршруты, и у вас появятся навыки мастерски пользоваться общественным транспортом, перемещаясь быстро, эффективно и удобно. Но и после нескольких недель такой жизни город может остаться незнакомым вам.

Наконец, порой случается так, что город становится вашим по-настоящему. Возможно, вы полюбите его и будете бродить по его улочкам бесцельно, получая удовольствие от самих прогулок. Вы станете отыскивать новые проходы от одной площади к другой через закоулки и дворы, удивительным путем попадать парками и тропинками в нужную точку. Эти дороги могут оказаться на удивление короткими, а способны завести бог знает куда. Но это не страшно: вы знаете этот город и никогда в нем не заблудитесь.

Общий школьный курс похож на освоение элементарных правил жизни в городе. Университетский курс математики уже ближе к экскурсии. Вам покажут главные древние памятники и знаменитые площади, к которым ведут большие проспекты. Глубокое погружение в ту или иную прикладную задачу напоминает командировку: тут не до блужданий, важно четко понять, на какую линию садиться и на какой остановке пересаживаться каждый день, чтобы не терять драгоценных сил и времени. Но с математикой у вас может случиться и настоящая любовь. И тогда вы уже не остаетесь в рамках лишь практической пользы или удобства, вам становится важно понять, почувствовать, что математика как большой город — это не только дома и площади, даже не линии метро и трамвайных маршрутов. Это единая система, соединяющая всё, что в ней есть, не только взаимным расположением, но и смыслами, контекстами, историями.

Эта книга не совсем о математике. Я приглашаю вас на прогулку по некоторым ее местечкам, хорошо известным и имеющим большую практическую пользу. Но двигаться мы будем несколько необычным маршрутом. Не прямым, как в учебнике, и не сложным и запутанным, как в научной работе, а легким, как бесцельное шатание в хорошей компании под интересный разговор. То и дело мы будем оказываться на развилках и площадях с четко обозначенными названиями, соответствующими разделам математики. Оглянувшись, мы отправимся дальше, но читатель может отметить про себя, что пересеченный нами проспект или бульвар — целое направление, куда можно углубиться самостоятельно, будь на то интерес или необходимость.

В стране математики говорят на своем языке, и не все указатели и надписи легко перевести на русский. Иногда я буду приводить цитаты на языке аборигенов. Иначе говоря, в книге есть формулы. Но это вовсе не единственный алфавит языка математики. Формулы можно выразить графически, и я всегда буду сопровождать уравнения иллюстрациями, которые можно понять интуитивно. Почему же я не отказался от формул, как многие авторы научно-популярных книг? В нашей математической стране не принято верить каждому встречному, не принято сильно полагаться на интуицию, чутье и даже на опыт. Да, опыт, в отличие от физики или психологии, здесь имеет сравнительно невысокую цену. В ходу только доказательство — самая твердая валюта, которой неведомы ни девальвация, ни инфляция, ни мода, ни конъюнктура. Она не обесценивается тысячелетиями (и это не фигура речи, мы используем доказательства тысячелетней давности каждый день). Таким образом, все, что я вам здесь наговорю, не должно приниматься на веру. Любое мое утверждение, вывод, даже самый неожиданный, можно проверить строгими доказательствами. Именно поэтому везде, где уместно, есть ключи-заметки в виде формул, которыми я руководствовался. Это, впрочем, не лишает читателя возможности любоваться непонятными значками, воспринимая их как орнамент, а автор оставляет за собой право давать математическим закономерностям не очень серьезные и даже фривольные житейские интерпретации. Ведь так гораздо интереснее!

Глава 1

Знакомимся с неприятностями

Разновидности неприятностей

Какие-то наши неприятности *детерминированы*: случайности не играют в их возникновении ключевой роли. Например, если вам понизили зарплату на 10%, а потом извинились и увеличили на 10%, в итоге этих махинаций вы останетесь в убытке, поскольку:

$$x(1 - 0{,}1)(1 + 0{,}1) = x(1 - 0{,}01) < x.$$

Более того, если зарплату сначала повысят, а потом, не извинившись даже, понизят на те же 10%, результат выйдет таким же. Ведь совершенно неважно, в каком порядке перемножаются коэффициенты. Это очень просто, немножко обидно, но к удаче отношения не имеет.

Примером случайной, хоть и весьма вероятной неприятности может быть волшебство, происходящее в наших карманах с наушниками: кладем их аккуратно смотанными в карман, а через полчаса там происходит чудо и вынимаем мы дикий узел проводов. В 2007 году вышла серьезная научная статья двух ученых из солнечного и безмятежного Сан-Диего под заголовком «Спонтанное образование узлов на возбуждаемой нити»*. В этой работе детально анализируется и моделируется запутывание наушников в кармане. Авторы, основываясь на теории узлов, теории вероятностей и физических экспериментах, убедительно показывают, что при стандартном способе сматывания наушники действительно должны запутываться, причем спустя всего лишь несколько секунд тряски. Впрочем, это мы и так наблюдаем почти каждый день. Сюрпризом здесь может оказаться только ожидаемая скорость запутывания.

Основной причиной образования узлов оказались, во-первых, петли, которые мы сами создаем, наматывая провод на руку, а во-вторых, три конца наушников: штекер и два динамика. В процессе случайного перемещения по карману они попадают в петли, что само по себе не страшно. Проблема возникает тогда, когда мы, пытаясь наушники распутать, тянем за эти концы. Тут-то и выясняется, что узлы на петле из веревки в трехмерном мире, раз появившись, не могут исчезнуть без нарушения целостности веревки. Пока мы трясем их, не выпуская концы наушников из рук, узлы, образованные этими концами и петлями, никуда не исчезают, а только затягиваются. Причем сами по себе петли ни в чем не виноваты. Если бы концов у наушников не было и они представляли собой замкнутое кольцо, то неразвязываемый узел образоваться бы не смог. Ведь узлы не только не исчезают, раз появившись, но и не возникают сами, если их изначально не было.

С этой неприятностью вполне можно бороться математическим способом: нужно либо исключить концы, что в случае наушников неинтересно, либо убрать петли. А это можно сделать с помощью операции сложения. Но не той, что мы изучали в школе, а той, что применяется к петлям на веревках и лентах. Как и числа, петли бывают разных знаков, причем для каждой «положительной» можно построить такую «отрицательную», что в сумме они дадут «ноль»: прямую веревку. Примеры таких петель показаны на рис. 1.1.

---

* Raymer D. M., Smith D. E. Spontaneous knotting of an agitated string // PNAS. October 16, 2007. Vol. 104. No. 42. Pp. 162–167.

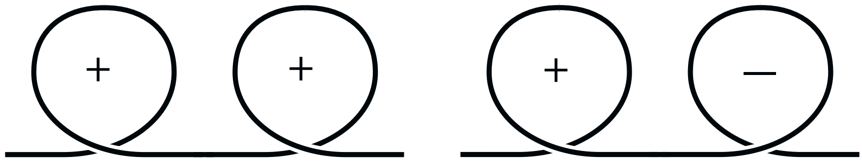

Рис. 1.1. Примеры сложения петель разных знаков

Попробуйте мысленно нанизать на шнурок несколько таких петель разных знаков и вычислите результат и его знак. Чтобы наушники не запутывались, число положительных и отрицательных петель должно оказаться равным. Таких способов сложения проводов несколько, один из них показан на рис. 1.2. Здесь петли разных «знаков» появляются сразу парами и взаимно уничтожают друг друга, не формируя узлов. Уже много лет я складываю наушники именно так, чувствуя себя крутым топологом, и всякий раз радуюсь как фокусу, когда они сами собой полностью разматываются от одного небрежного встряхивания рукой.

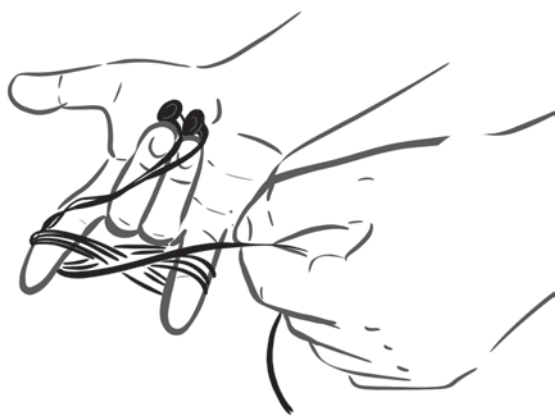

Рис. 1.2. Один из способов складывания проводов, не приводящий к их запутыванию. Он хорош еще и тем, что попутно вы складываете пальцы в мудру любви

Но и среди стохастических по природе законов не все одинаково интересны. Например, закон Бука («Ключи всегда находишь в последнем кармане») не имеет рационального основания. Простой подсчет показывает, что при равной вероятности отыскать ключи для всех карманов последний ничем не отличается от прочих. Впрочем, этот закон можно трактовать разве что как забавный трюизм: утверждение Бука верно всегда, поскольку тот карман, в котором ключи будут обнаружены, окажется завершающим в процессе поиска и, следовательно, последним. Однако и здесь есть о чем поговорить. В процессе перебора карманов так называемая условная вероятность того, что ключи лежат в последнем из них, действительно повышается. Но это уже нельзя трактовать как вероятность того, что ключи находятся в последнем кармане, тут уже другая задача. Мы вернемся к этому примеру в главе 5.

Нас будут интересовать законы парадоксальные и поучительные, те, которые выглядят злым роком, выбирающим из множества вариантов самые досадные и неприятные, наперекор интуиции, подсказывающей, что этот вариант не должен быть самым вероятным. И, прежде чем приступить к детальным и точным рассуждениям о случайностях и вероятностях, предположим, что какая-то интуиция в отношении случайных процессов и вероятностей у нас уже есть. Это вполне допустимо даже в математической книге — до какого-то момента использовать интуитивное представление о предмете, а потом дать строгое определение. Тем самым, во-первых, мы определяем границы применимости нашей интуиции, а во-вторых, расширяем их в правильном с научной точки зрения направлении. Но не будем забывать о законе Вертерна: *«Предположение — мать любой неразберихи»*, и все наши гипотезы и даже строгие выводы постараемся, где возможно, проверять с помощью имитационного моделирования.

А при чем тут математика?

Петли, наушники, законы подлости, неприятности… при чем же тут математика? Почему вообще имеет смысл рассуждать о законах подлости не так, как Артур Блох, когда он просто посмеялся и нашел меткий афоризм?

С математикой знакомы все, но мало кто готов ответить на вопрос: что делают математики? Считают и вычисляют? Рисуют треугольники и круги на бумаге в клеточку? Передвигают туда-сюда буквы в уравнениях? Придумывают странные значки и закорючки, чтобы потом писать непонятные тексты? Решают задачи, вычисляя что-то по заказу инженеров, медиков, химиков и других практиков?

Если вы никогда этого не делали, загляните в какой-нибудь математический журнал — просто из любопытства. Сейчас это легко сделать не выходя из дома: поищите в Сети что-то на тему «гомологическая теория типов» или «топология». Вы поразитесь тому, насколько то, что вы там обнаружите, не похоже на школьный образ математики. Но вот что важно: эта колоссальная разница не говорит о том, что есть одна, «простая» математика и другая, «сложная». Математику часто называют языком. Как на любом живом человеческом языке можно писать анекдоты и незамысловатые детские стишки или неуловимо тонкую поэзию, тяжеловесный роман или многостраничный договор, так и с помощью математики можно рассуждать о числах и отрезках, а можно — о петлях и поверхностях, многомерных пространствах и даже основах самой этой науки. Не нужно думать, что числа и отрезки — самое простое, с чем работают математики! Современные теория чисел и геометрия — огромные и во многом неизведанные области, в которых ведутся очень интенсивные исследования.

Но что же все-таки изучают математики? Для чего им этот язык? Чаще всего речь идет о тех или иных *моделях*. Например, что может быть моделью количества? Число, скажете вы. Но любое ли число годится для этого? Младшие школьники, впервые сталкиваясь с отрицательными числами, испытывают замешательство, ведь модель числа оказывается шире привычного им понятия количества. Переход от количества к шагам помогает понять, что числа годятся для моделирования движений на прямой. Тогда отрицательные числа обретают наконец смысл. А чем можно моделировать скорость? Тоже числом. Но если я скажу вам, что двигаюсь со скоростью 60, будет ли этого достаточно для описания того, что со мной происходит? Точно нет! Остается неясно ни куда я двигаюсь, ни, собственно, с какой скоростью:

60 может означать как 60 км/ч, так и 60 мм/год. Отсюда можно заключить, что для моделирования скорости только числа недостаточно. А если, желая объяснить вам, как я перемещаюсь, я изображу стрелку, станет ли понятнее? Стрелка — ориентированный отрезок — в качестве модели скорости лучше. Она показывает направление, а сравнив ее с какой-то эталонной стрелкой, принятой за единицу, можно определить ее масштаб. Более того, стрелки можно складывать и умножать на числа, получая новые корректные стрелки! И, главное, если мне удастся придумать, как однозначно сопоставлять скорости предметов стрелкам на бумаге, причем окажется, что если v_1 соответствует стрелка a, а скорости v_2 — стрелка b, сумме скоростей $3v_1 + v_2$ будет соответствовать стрелка $3a + b$ и никакая иная, — то это уже будет свойством, позволяющим мне не бегать по двору, изучая скорости, а, сидя в кресле, рисовать стрелки на бумаге.

А можно ли чем-то моделировать стрелки? Абстрактной моделью в этом случае способен стать упорядоченный набор чисел с определенными правилами сложения и умножения на число, который называется *вектором*. Так математики пришли к мысли о линейных векторных пространствах, элементами которых являются векторы. Изучая свойства этих пространств (*изучая*, а не *придумывая*, разницу мы обсудим позже), математики выработали единый язык, который называется *линейной алгеброй*, для разговора о таких разных вещах, как, например, цвета, вращения предметов в пространстве, спектры звуковых сигналов. Пользуясь этим языком, уже можно найти оптимальную стратегию в экономической игре или научить компьютер распознавать нашу речь, рукописные буквы либо лицо человека в толпе.

Математики работают с *математическими структурами* — универсальными моделями всего, с чем имеет дело человеческий разум. *Группы, поля, решетки, графы, петли, косы, языки и бесконечномерные пространства*... Все это структуры с четко определенными свойствами и, если угодно, поведением. Вот уже тысячи лет математики исследуют взаимосвязи между ними, обнаруживают в реальном и математическом мире, что еще можно с их помощью моделировать и при каких условиях.

Я не случайно называл манипуляции с петлями на проводе наушников «сложением», а сами петли «положительными» и «отрицательными». Такая терминология оправдана тем, что петли на струне образуют структуру, называемую *группой*. Для ее построения нужно иметь множество* A и некую операцию +, которая будет удовлетворять следующим четырем свойствам.

1. *Замкнутость*: для любых двух элементов из множества A результат операции + всегда будет элементом этого же множества.

2. *Ассоциативность*: для любых a, b, c из множества A верно, что $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. *Существование нейтрального элемента*: в A есть единственный элемент 0, такой, что $0 + a = a + 0 = a$ для любого a из A.

4. *Обратимость*: для каждого элемента a в A существует единственный обратный ему элемент $(-a)$, такой, что $a + (-a) = 0$.

Группа — общая модель для обратимого ассоциативного комбинирования действий или объектов. Ее образуют числа с операцией сложения, и они же формируют группу с операцией умножения. Несложно убедиться, что аксиомам группы удовлетворяют и петли на веревке или ленте. Понятие группы настолько важно в математике, что, хотя они сами нам в этой книге и не понадобятся, нелишним будет о них рассказать тем, кто с таким подходом еще не знаком, или напомнить тем, кто о группах уже слышал, но не связал свою жизнь с их изучением.

Мы в основном будем иметь дело с двумя структурами: *случайными величинами* и *случайными функциями*. Но, знакомясь с ними, мы встретим многие другие понятия и модели и обозначим некоторые связи между ними.

А начнем мы с простого инструментария, который будет полезен на протяжении всего рассказа. И для этого нам потребуется… велосипед!

---

* Полагаю, читатель знаком с понятием множества, а также с отношениями и операциями над множествами: пересечением, объединением и пр. Для понимания книги это не обязательно, но для понимания современной математики строго необходимо. Так что любопытного неофита я отсылаю к списку литературы в самом конце книги, а еще лучше — к преподавателю. Поверьте, если школьного учителя попросить растолковать вам, что такое множества и что с ними можно делать, вы оба получите удовольствие!

Закон велосипедиста

Я большой энтузиаст любительского велосипедного спорта. Многие задачи, вошедшие в эту книгу, я обмозговывал в седле, вертя их мысленно и так и эдак, пытаясь найти наиболее наглядный и простой подход к их объяснению. Что может быть лучше, чем мчаться по трассе ранним утром, по холодку, скатываясь с легкого склона... Это ощущение стоит того, чтобы ради него преодолевать бесконечные подъемы или сопротивление встречному ветру! Правда, порой кажется, что подъемов больше, чем спусков, а ветер норовит быть встречным, куда ни поверни. В книгах по мерфологии в связи с этим приводится **закон велосипедиста**:

**Независимо от того, куда вы едете, —
это в гору и против ветра.**

Живу я на Камчатке. В Петропавловске много горок — катаясь по городу, их не миновать. Однако меня должна успокаивать такая мысль: начиная свой путь из дома, я возвращаюсь снова туда, а это значит, что суммарный спуск должен быть равен суммарному подъему. Особенно честным будет маршрут, в котором прямой и обратный пути совпадают.

Представим себе 2-километровую трассу, которая состоит из одной симметричной горки: километр вверх, километр вниз. Вверх по склону я могу достаточно долго ехать со скоростью 10 км/ч, а на спуске стараюсь держать скорость 40 км/ч (я осторожный велосипедист). Исходя из этих условий, на подъем я буду тратить в четыре раза больше времени, чем на спуск, и общая картина получится такой: 4/5 времени путешествия уйдет на тягучий подъем и лишь 1/5 — на приятный спуск. Обидно — 80% времени прогулки займет сложный участок пути! Этот результат не зависит от длины горок, а определяется лишь соотношением скоростей. Если я выкачусь из нашего холмистого города в сторону океана или в долину реки Авачи, горок почти не будет, но в моем распоряжении остаются встречный и попутный ветер или участки с плохой дорогой, которые также способны отнять значительную часть времени путешествия.

Взглянем на закон велосипедиста несколько иначе. Если я сделаю множество селфи на протяжении своей велопрогулки в случайные моменты, а потом займусь их подсчетом и классификацией, то обнаружу, что большинство картинок показывает мне согбенную фигуру в оранжевом шлеме, упорно ползущую вверх по склону либо сопротивляющуюся встречному ветру. Доля снимков с летящим и сияющим велосипедистом, как на рекламной картинке, увы, составит лишь около 20%. А что скажет статистика? Если мы выпустим на холмистую трассу большую толпу велосипедистов, подождем немного и понаблюдаем за их плотностью, то увидим, что бóльшая часть спортсменов толпится на трудных участках, а доля безмятежно улыбающихся лиц не так уж и велика!

Измеряем уровень подлости

Давайте, как когда-то в школе, покажем на графике зависимость перемещения велосипедиста от времени при движении по симметричной треугольной горке. Только сделаем всё «по-взрослому», в так называемых *собственных масштабах задачи**: расстояние станем измерять не в километрах, а в долях общего пути. Так же поступим и со временем путешествия. Первую половину пути велосипедист двигался медленно и долго — 4/5 всего времени, — а вторую преодолел быстро — за 1/5 времени (рис. 1.3).

Что же нам показывает полученный график? Во-первых, мы можем сравнить скорости на разных участках (наклоны) со *средней скоростью,* которая соответствует диагональной линии. Во-вторых, становится наглядным соотношение 80/50 — 80% времени путешествия заняла трудная половина маршрута. Кроме того, из графика можно заключить, что за первую половину расчетного времени путешествия велосипедист успеет преодолеть лишь треть пути. Пока все предельно просто и понятно.

---

* Подробнее о собственных масштабах и обезразмеривании задачи мы поговорим в главе 2, когда речь пойдет о бутербродах.