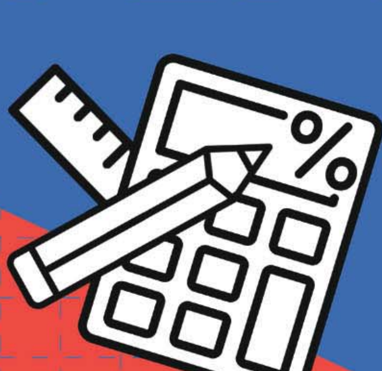
МАТЕМАТИКА

А.Н. Роганин
Ю.А. Захарийченко
Л.И. Захарийченко

Самый полный справочник для подготовки к ЕГЭ



УДК 373.5:51
ББК 22.1я721
Р59

Роганин, Александр Николаевич.
Р59 Математика / А. Н. Роганин, Ю. А. Захарийченко, Л. И. Захарийченко. — Москва : Эксмо, 2021. — 512 с. — (Самый полный справочник для подготовки к ЕГЭ).

ISBN 978-5-04-118768-2

Справочник предназначен для подготовки учащихся старших классов к ЕГЭ по математике. Представлена необходимая информация по всем темам школьного курса: теоретические сведения, знание которых проверяется на экзамене, и подробные решения задач и примеров. После каждой темы для закрепления знаний включены задания для самостоятельного выполнения.

Издание может быть использовано учащимися для подготовки к урокам и экзамену, учителями и репетиторами для организации учебного процесса.

УДК 373.5:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-118768-2

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел. 1. Выражения и преобразования

Раздел 2. Уравнения и неравенства

Раздел 4. Числа и выражения

Раздел 5. Геометрические фигуры и их свойства

Раздел 6. Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятностей

Раздел 1 ВЫРАЖЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1.1. КОРЕНЬ СТЕПЕНИ *n*

1.1.1. Понятие корня степени *n*

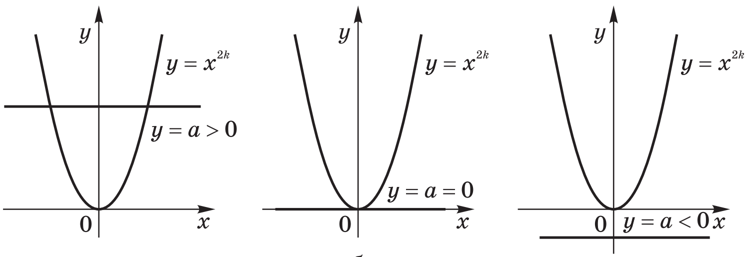
Корнем степени *n* из числа *a* называется такое число, *n*-я степень которого равна *a*; *a* — действительное число.

Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку 23 = 8; корень четвертой степени из числа 16 равен 2 или -2, поскольку 24 = 16 и $(-2)^4 = 16$; корень десятой степени из 0 равен 0, поскольку $0^{10} = 0$.

Согласно этому определению корень степени n — это корень уравнения $x^n = a$. Число корней этого уравнения зависит от n и a.

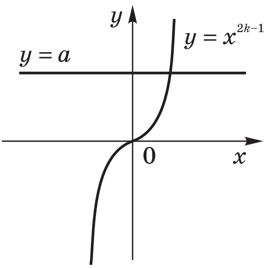
Если n — четное, то есть $n = 2k$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k} = a$ имеет два корня, если $a > 0$; один корень, если $a = 0$; не имеет корней, если $a < 0$.

Если n — нечетное, то есть $n = 2^{k-1}$, $k \in N$, то уравнение $x^{2k-1} = a$ всегда имеет только один корень.



а *б* *в*

Неотрицательный корень уравнения $x^n = a$ называют арифметическим корнем n-й степени из числа a.



Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень степени n из числа а обозначают так: $\sqrt[n]{a}$. Число n называют показателем корня, число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$ и называют арифметическим квадратным корнем.

Арифметический корень третьей степени называют кубическим корнем.

В тех случаях, когда понятно, что речь идет об арифметическом корне степени n, коротко говорят «корень степени n» или «корень n-й степени».

Пример 1. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[4]{81}$; в) $\sqrt[5]{1}$; г) $\sqrt[100]{0}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{8} = 2$, поскольку $2^3 = 8$ и $2 > 0$;

б) $\sqrt[4]{81} = 3$, поскольку $3^4 = 81$ и $3 > 0$;

в) $\sqrt[5]{1} = 1$, поскольку $1^5 = 1$ и $1 > 0$;

г) $\sqrt[100]{0} = 0$, поскольку $0^{100} = 0$ и $0 = 0$.

Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел:

$\sqrt[2k]{a} = x$, $a > 0$, $x \in N$.

Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in N$.

Пример 2. Найдите значение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-243}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$;

б) $\sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3$.

Непосредственно из определения арифметического корня степени n следует:

1. Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0; \\ -a, \text{ если } a < 0, \text{ где } k \in N. \end{cases}$

3. $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, где $k \in N$.

П р и м е р 3. Найдите арифметический корень $\sqrt[8]{(a-b)^8}$ при а) $a \ge b$; б) $a < b$.

Решение.

$\sqrt[8]{(a-b)^8} = |a-b|$.

а) если $a \ge b$, то $a - b \ge 0$ и $|a - b| = a - b$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = a - b$;

б) если $a < b$, то $a - b < 0$ и $|a - b| = -(a - b) = b - a$, следовательно, $\sqrt[8]{(a-b)^8} = b - a$.

1.1.2. Свойства корня степени *n*

Корень из произведения и произведение корней

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей:

$$\textbf{если } a \ge 0,\ b \ge 0, \textbf{ то } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило умножения арифметических корней n-й степени:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \textbf{ где } a \ge 0,\ b \ge 0.$$

Пример 1. Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}$; б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{0,027\cdot 125}=\sqrt[3]{0,027}\cdot\sqrt[3]{125}=0,3\cdot 5=1{,}5$;

б) $\sqrt[4]{256\cdot 0,0081}=\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{0,0081}=4\cdot 0,3=1{,}2$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}=\sqrt[3]{1000}=10$;

б) $\sqrt[4]{324}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{324\cdot 4}=\sqrt[4]{18^2\cdot 2^2}=\sqrt[4]{\left(2\cdot 3^2\right)^2\cdot 2^2}=$

$=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^4}=6$.

Пример 3. Упростите выражение:

$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2$.

Решение.

$$\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)^2+2\sqrt{7+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}\right)^2=$$

$$=7+2\sqrt{10}+2\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}+7-2\sqrt{10}=$$

$$=14+2\sqrt{49-4\cdot 10}=14+2\cdot 3=20.$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}=$$

$$=\sqrt[3]{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{16-8}=\sqrt[3]{8}=2.$$

Корень из частного и частное корней

Корень из частного, делимое которого неотрицательное, а делитель положительный, равен частному корню из делимого, деленному на корень из делителя:

$$\textbf{если } a \geq 0 \textbf{ и } b > 0\textbf{, то } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Поменяв местами в последнем равенстве левую и правую части, получим равенство, выражающее правило деления арифметических корней n-й степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \text{ где } a \geq 0,\ b > 0.$$

П р и м е р 1 . Найдите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$; б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$;

б) $\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2,5$;

в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1,5$.

П р и м е р 2 . Вычислите:

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$.

Решение.

а) $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$;

б) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$.

Корень из степени и степень корня

При возведении корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня:

$$\text{если } a > 0, \text{ то } (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, \text{ где } n \in N,\ n \geq 2.$$

Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число то значение корня не изменится:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } a \geq 0,\ n \in N,\ n \geq 2.$$

Пример 1. Упростите:

а) $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[3]{1+2\sqrt{2}+2} = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$;

б) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{5^9}$; б) $\sqrt[5]{0,3^{10}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{5^9} = \sqrt[3]{(5^3)^3} = 5^3 = 125$;

б) $\sqrt[5]{0,3^{10}} = \sqrt[5]{(0,3^2)^5} = 0,3^2 = 0,09$.

Пример 3. Упростите:

а) $\sqrt[3]{a^6}$; б) $\sqrt[4]{a^{20}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{(a^2)^3} = a^2$;

б) $\sqrt[4]{a^{20}} = \sqrt[4]{(a^5)^4} = \left|a^5\right| = |a|^5$.

Корень степени *m* из корня степени *n*

Чтобы извлечь корень из корня, нужно из подкоренного выражения извлечь корень с показателем, который равен произведению двух данных показателей:

если $a \geq 0$, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $m \geq 2$, $n \geq 2$.

Пример 1. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; в) $\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[12]{3}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$;

в) $\sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{4^3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[3]{4}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{4096}$; б) $\sqrt[4]{1296}$; в) $\sqrt[6]{729}$.

Решение.

а) $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

б) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt{\sqrt{1296}} = \sqrt{36} = 6$;

в) $\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Корень из произведения и частного степеней

Пример 1. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}}$; б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12} \cdot 5^6}}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{\dfrac{3^{10} \cdot 5^5}{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{7^{10}}} = \dfrac{\sqrt[5]{(3^2)^5} \cdot \sqrt[5]{5^5}}{\sqrt[5]{(7^2)^5}} = \dfrac{3^2 \cdot 5}{7^2} = \dfrac{45}{49}$;

б) $\sqrt[6]{\dfrac{9^9}{2^{12}\cdot 5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{9^9}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^{18}}}{\sqrt[6]{2^{12}}\cdot\sqrt[6]{5^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6\cdot\sqrt[6]{5^6}}} =$

$= \dfrac{\sqrt[6]{(3^3)^6}}{\sqrt[6]{(2^2)^6\cdot\sqrt[6]{5^6}}} = \dfrac{3^3}{2^2\cdot 5} = \dfrac{27}{20} = 1\dfrac{7}{20}.$

Корень из произведения и частного корней

Пример 1. Упростите:

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}}.$

Решение.

$\sqrt[7]{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{ab^2}\cdot\sqrt[6]{a^5b} : \sqrt[8]{a^7b^3}} =$

$= \sqrt[7]{\sqrt[12]{(a^2)^4}\cdot\sqrt[12]{(ab^2)^3}\cdot\sqrt[12]{(a^5b)^2} : \sqrt[8]{a^7b^3}} =$

$= \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^8a^3b^6a^{10}b^2} : \sqrt[8]{a^7b^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[12]{a^{21}b^8} : \sqrt[8]{a^7b^3}} =$

$= \sqrt[7]{\sqrt[24]{(a^{21}b^8)^2} : \sqrt[24]{(a^7b^3)^3}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{\dfrac{a^{42}b^{16}}{a^{21}b^9}}} = \sqrt[7]{\sqrt[24]{a^{21}b^7}} =$

$= \sqrt[24]{\sqrt[7]{a^{21}b^7}} = \sqrt[24]{a^3b}.$

Другие комбинации свойств корней степени n

Пример 1. Упростите:

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$; в) $\sqrt{2\sqrt{x}}$; г) $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[4]{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt[3]{2\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{24}} = \sqrt[6]{24}$;

б) $\sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\sqrt{80}} = \sqrt[6]{80}$;

в) $\sqrt{2\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt{4x}} = \sqrt[4]{4x}$;

г) $\sqrt[4]{2 \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[16]{32}$.

Пример 2. Найдите значение выражения:

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} + \frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}.$$

Решение.

$$\frac{5+2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}} + \frac{5-2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(5+2\sqrt{2})^2}{(5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})} + \frac{(5-2\sqrt{2})^2}{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{25+20\sqrt{2}+8}{25-8} + \frac{25-20\sqrt{2}+8}{25-8} = \frac{66}{17} = 3\frac{15}{17}.$$

Пример 3. Найдите значение выражения:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}.$$

Решение.

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^2} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} =$$

$$= \sqrt[4]{16+8\sqrt{7}+7} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} = \sqrt[4]{23+8\sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23-8\sqrt{7}} =$$

$$= \sqrt[4]{23^2-(8\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{529-448} = \sqrt[4]{81} = 3.$$

1.1.3. Тождественные преобразования иррациональных выражений

Вынесение множителя из-под корня

Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то рациональный множитель можно вынести из-под знака корня:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a^{n+m}} = \sqrt[n]{a^n \cdot a^m} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^m} = a\sqrt[n]{a^m},\ a > 0,\ n \in N,\ n \geq 2.}$$

Пример. Вынести множитель из-под корня.

а) $\sqrt[5]{2^7}$; б) $\sqrt{24}$; в) $\sqrt[4]{2500}$; г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}$.

Решение.

а) $\sqrt[5]{2^7}=\sqrt[5]{2^5\cdot 2^2}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{2^2}=2\sqrt[5]{4}$;

б) $\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{6}=2\sqrt{6}$;

в) $\sqrt[4]{2500}=\sqrt[4]{625\cdot 4}=\sqrt[4]{625}\cdot\sqrt[4]{4}=5\cdot\sqrt[4]{2^2}=5\sqrt{2}$;

г) $\sqrt[3]{a^{11}\cdot b^4}=\sqrt[3]{a^9\cdot a^2\cdot b^3\cdot b}=\sqrt[3]{a^9\cdot b^3}\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}=$
$=a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Ответ: а) $2\sqrt[5]{4}$; б) $2\sqrt{6}$; в) $5\sqrt{2}$; г) $a^3\cdot b\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot b}$.

Внесение множителя под корень

Если рациональный множитель стоит перед корнем, то его можно внести под корень. Для этого нужно этот множитель возвести в степень корня:

$$\boldsymbol{a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}, \textbf{ если } \boldsymbol{a\ge 0,\ b\ge 0,\ n\in N,\ n\ge 2}.$$

Для корней четной степени в зависимости от знака a имеем: $a\cdot\sqrt[2n]{b}=\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\ge 0$, $b\ge 0$; $a\sqrt[2n]{b}=-\sqrt[2n]{a^{2n}b}$, если $a\le 0$, $b\ge 0$.

В частности, для квадратных корней: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$, если $a\ge 0$, $b\ge 0$; $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$, если $a\le 0$, $b\ge 0$.

Пример. Внести множитель под корень:

а) $3\sqrt[3]{6}$; б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}$ в) $-5a\sqrt{\dfrac{8}{25}}$, $a<0$.

Решение.

а) $3\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{3^3\cdot 6}=\sqrt[3]{27\cdot 6}=\sqrt[3]{162}$;

б) $a^2\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}}\cdot\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{a^{10}b}$;

в) $-5a\sqrt{\dfrac{b}{25}}=\sqrt{\dfrac{25a^2b}{25}}=\sqrt{a^2b}$.

Ответ: а) $\sqrt[3]{162}$; б) $\sqrt[5]{a^{10}b}$; в) $\sqrt{a^2b}$.

Приведение подкоренного выражения к целому виду

Привести подкоренное выражение к целому виду — это значит освободить подкоренное выражение от знаменателя (если он есть):

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^k}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^k \cdot b^{n-k}}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot b^{n-k}}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}},$$

если $a \geq 0$, $b > 0$.

Пример. $\sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 5}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{15}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt[3]{15}.$

Ответ: $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$.

1.2. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1.2.1. Понятие степени с рациональным показателем

Степень с натуральным показателем

***n*-й натуральной степенью действительного числа *a* называется действительное число *b*, получаемое в результате умножения числа а самого на себя *n* раз:**

$$a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

n-ю степень числа a обозначают a^n и пишут

$$b = a^n.$$

Число a называется основанием степени, а число n — показателем степени ($n \geq 2$, $n \in Z$).

$$0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^1 = a.$$

Например:
$5^1 = 5$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $(-2)^3 =$
$= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Степень с целым показателем

При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$, 0^0 — не определено.

При $a \neq 0$ по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (n — натуральное число).

Например:
$8^{-1} = \dfrac{1}{8}$; $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$; $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$;

0^{-5} — не определено.

Степень с рациональным показателем

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

где $a > 0$, $m \in N$, $m > 2$, $n \in Z$.

Например:
$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{25^1} = \sqrt{25} = 5$; $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$; $2^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{8}}$.

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, n — натуральное число, $n \geq 2$.

Например:
$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$; $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$; $(-5)^{\frac{1}{3}}$ — не определено.