СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

О. В. Воротынова, С. Л. Крафт, Л. Ю. Фомина

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Статика

Учебное пособие



ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

УДК 531.01(07)
ББК 22.21я73
В758

Р е ц е н з е н т ы :

Е. А. Чабан, кандидат технических наук, доцент кафедры «Общепрофессиональные дисциплины» КрИЖТ ИрГУПС;

О. В. Пиляева, кандидат технических наук, доцент кафедры «Агроинженерия» Ачинского филиала КрасГАУ

Воротынова, О. В.

В758 Теоретическая механика. Статика : учеб. пособие / О. В. Воротынова, С. Л. Крафт, Л. Ю. Фомина. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2020. – 152 с.

ISBN 978-5-7638-4245-6

Изложен теоретический материал и приведены примеры решения типовых задач по темам «Система сходящихся сил», «Плоская система сил», «Пространственная система сил». Предложены оригинальные задачи и задания для закрепления практических навыков. Особое внимание уделено темам «Законы трения», «Устойчивость равновесия».

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 08.03.01 «Строительство», 20.03.02 «Природообустройство и водопользование», 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Электронный вариант издания см.:
http://catalog.sfu-kras.ru

УДК 531.01(07)
ББК 22.21я73

ISBN 978-5-7638-4245-6

© Сибирский федеральный университет, 2020

ВВЕДЕНИЕ

История науки «Теоретическая механика» своими корнями уходит в древнейшую эпоху.

Во все времена люди стремились к тому, как обустроить свой быт, освоить новые территории, и для облегчения своих физических усилий им необходимо было изобретать различные приспособления и механизмы.

В связи с этим появилась и развивалась наука «Механика».

Впервые термин «механика» появился в трудах древнегреческого философа Аристотеля в IV веке до н. э. и означал: «ухищрение», «машина».

Вспомним, что под механическим движением мы понимаем простое перемещение тел в пространстве, т. е. изменение их местоположения с течением времени по отношению к другим телам.

Теоретическая механика – это наука о наиболее общих законах механического движения и связанные с ним механические взаимодействия между телами.

При изучении *общих* законов используют абстрактные понятия, которые позволяют отвлечься от несущественных свойств тел и явлений. Чтобы не рассматривать характер взаимодействия тел и площадь их соприкосновения, вводят понятие *силы*. В случаях когда можно пренебречь способностью тела деформироваться (изменять свои размеры), говорят об *абсолютно твердом теле*. Если можно пренебречь различием в движении отдельных точек тела (т. е. отвлечься от такого свойства тела, как протяженность) вводят понятие *материальной точки*.

Классическая механика была сформирована англичанином И. Ньютоном (физик, математик) в XVII веке н. э., и базируется она на основных аксиомах механики (законах Ньютона). Классическая механика актуальна и в наши дни и является базой большинства инженерных расчетов (в частности, при проектировании зданий и сооружений).

Дальнейшее развитие механика получила в трудах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа (XVIII в.); Л. Навье, Дж. Стокса, Н. Е. Жуковского, А. М. Ляпунова, А. Пуанкаре и др. (XIX–XX вв.).

Дисциплина «Теоретическая механика» включает в себя три модуля: «Статика», «Кинематика» и «Динамика».

Задача дисциплины «Теоретическая механика» – дать будущим инженерам основные сведения о законах движения и равновесия тел, о методах расчета конструкций и их элементов, заложить базу для изучения таких специальных дисциплин, как *сопротивление материалов, техническая механика, строительная механика, строительные конструкции, проектирование зданий и сооружений.*

Данное учебное пособие посвящено изучению модуля теоретической механики «Статика».

Статика – это раздел механики, в котором изучают равновесие тел под действием приложенных к ним сил, а также замену одной системы сил другой, ей эквивалентной.

В пособии приводится теоретический материал с формулировками и доказательством основных положений и теорем статики. Разобраны примеры решения задач и оригинальных заданий. Для самоконтроля степени усвоения теоретического материала в конце каждой главы имеются контрольные вопросы. Для закрепления практических навыков предлагаются задачи и задания для самостоятельного решения.

В отличие от большинства имеющихся учебных пособий по дисциплине данное учебное пособие довольно подробно рассматривает такие темы, как «Равновесие тел с учетом трения»; «Устойчивость тел»; «Пространственная система сил».

Для закрепления полученных знаний рекомендуется после изучения каждой главы пособия ответить на контрольные вопросы, решить задачи и задания из приложения по соответствующим темам.

Для успешного усвоения материала теоретической механики необходимо иметь базовую математическую подготовку. Во всех разделах курса широко применяются:

1) векторная алгебра (сложение и разложение векторов, скалярное и векторное произведение векторов, проекции векторов на плоскости и координатные оси);

2) математический анализ (дифференцирование функций, нахождение интегралов от простейших функций – определенных и неопределенных);

3) геометрия и тригонометрия.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ТЕОРЕМЫ

1.1. Основные понятия статики

Абсолютно твердое тело – *тело, расстояние между двумя точками которого остается неизменным*.

Сила $\overline{F}$ – векторная величина (рис. 1.1), являющаяся мерой механического взаимодействия между телами. Сила характеризуется величиной (модулем), направлением и точкой приложения A (рис. 1.1). Прямая, вдоль которой направлен вектор силы, называется *линией действия силы.*

Система сил – это *совокупность нескольких сил*.

Если линии действия сил системы принадлежат одной плоскости, то такая система называется **плоской системой сил**. Если линии действия сил системы не лежат в одной плоскости, то такая система называется **пространственной системой сил**.

Если одну систему сил, действующих на твердое тело, заменить другой системой и при этом состояние тела не изменится, то такие две системы сил называют **эквивалентными**.

Систему сил, которая будучи приложенной к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния, называют **уравновешенной** или **эквивалентной нулю**.

Сила $\vec{R}$, эквивалентная системе сил, называется **равнодействующей** системы сил (рис. 1.2).

Силу $\vec{R}^{/}$, равную по модулю равнодействующей, направленную с ней по одной прямой в противоположную сторону, называют **уравновешивающей** (рис. 1.3).

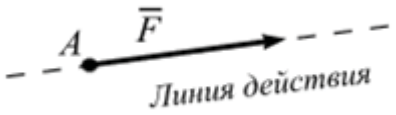


Рис. 1.1

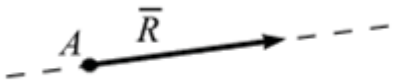


Рис. 1.2

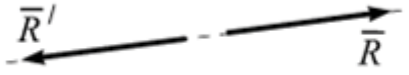


Рис. 1.3

Силы, действующие на тела данной механической системы со стороны тел, не входящих в эту систему, называют **внешними** ($\vec{F}^e$).

Силы, действующие между телами данной механической системы, называют **внутренними** ($\vec{F}^i$).*

1.2. Основные аксиомы статики

Рассмотрим аксиомы механики.

1. **Принцип инерции**: *материальная точка, на которую не действуют силы или действует уравновешенная система сил, находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно*.

2. **О равновесии тела под действием двух сил**: *твердое тело находится в равновесии под действием двух сил, если они равны по модулю, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны* (рис. 1.4): $\vec{F} = -\vec{F}'$.



Рис. 1.4

3. **О присоединении и исключении уравновешенной системы сил**: *если к системе сил, действующей на твердое тело, присоединить или из неё исключить уравновешенную систему сил, то действие этой системы сил на твердое тело не изменится*.

Из 2- и 3-й аксиом следует **теорема***: действие силы на твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы в любую другую точку тела на линии её действия.*

Вектор, обладающий таким свойством, называется скользящим, т. е. **сила – это скользящий вектор**.

Доказательство

Пускай на тело действует сила $\vec{F}$, приложенная к точке *A* (рис. 1.5, *а*).

Тогда по 3-й аксиоме мы можем присоединить уравновешенную систему сил. Прикладываем к точке *B* тела систему сил $\vec{F}'; \vec{F}''$, и по 2-й аксиоме имеем следующее: так как это уравновешенная система двух сил, то они направлены по одной прямой и $\vec{F}' = -\vec{F}''$ (рис. 1.5, *б*).

*Верхние индексы *e* и *i* от латинских: *exterior* (внешний) и *interior* (внутренний).

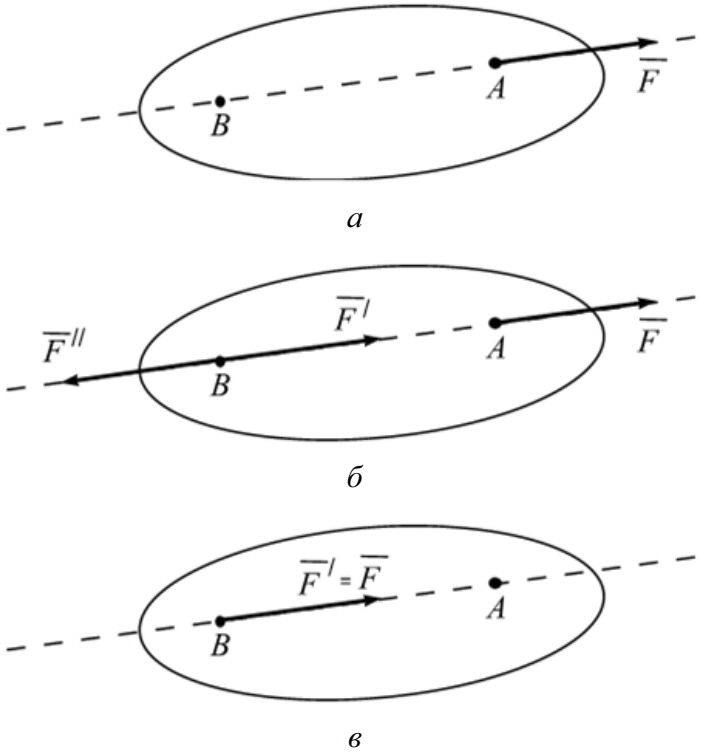


Рис. 1.5

Причем силу $\vec{F}'$ выбрали так, чтобы она была направлена по линии действия силы $\vec{F}$ и $\vec{F} = \vec{F}'$.

Тогда $\vec{F} = -\vec{F}''$ и система сил $\vec{F}; \vec{F}''$ по 2-й аксиоме является уравновешенной, которую, следуя 3-й аксиоме, можно исключить.

В результате осталась одна сила $\vec{F}'$, приложенная к точке B (рис. 1.5, *в*).

Теорема доказана.

4. **Параллелограмм двух сил**: *равнодействующая двух пересекающихся сил, действующих на твердое тело, приложена к точке пересечения линий их действия и определяется диагональю параллелограмма, построенного на этих силах* (рис. 1.6), т. е.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Модуль равнодействующей можно определить, используя теорему косинусов:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\beta} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\,(180° - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha} .$$

5. **Равенство действия и противодействия:** *две материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, равными по модулю, направленными по одной прямой в противоположные стороны* (рис. 1.7).

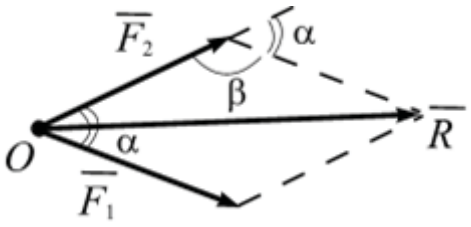


Рис. 1.6

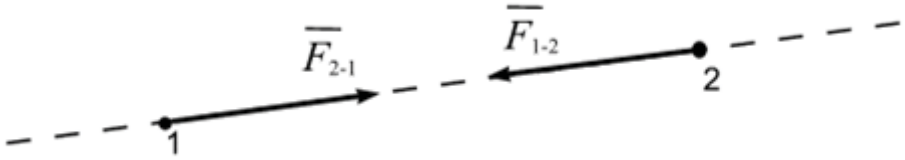


Рис. 1.7

$$\vec{F}_{2-1} = -\vec{F}_{1-2}.$$

Из 5-й аксиомы следует важное свойство внутренних сил: **система внутренних сил является уравновешенной**.

6. **Принцип отвердевания**: *равновесие системы сил, приложенной к деформирующемуся телу, сохраняется при его отвердевании.*

Этот принцип используют, например, при расчете составных конструкций.

7. **Принцип освобождаемости от связей**: *всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями*.

1.3. Система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется **системой сходящихся сил** (рис. 1.8).

Теорема. *Система сходящихся сил имеет равнодействующую, приложенную к точке пересечения линий действия сил системы и равную геометрической сумме сил системы.*

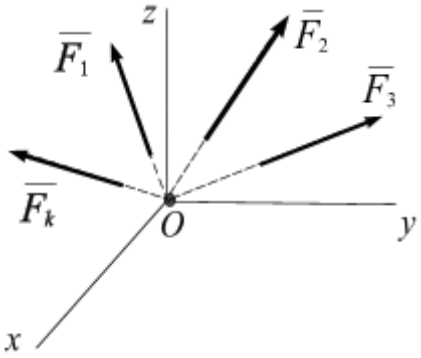


Рис. 1.8

Для системы из *n* сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ имеем:

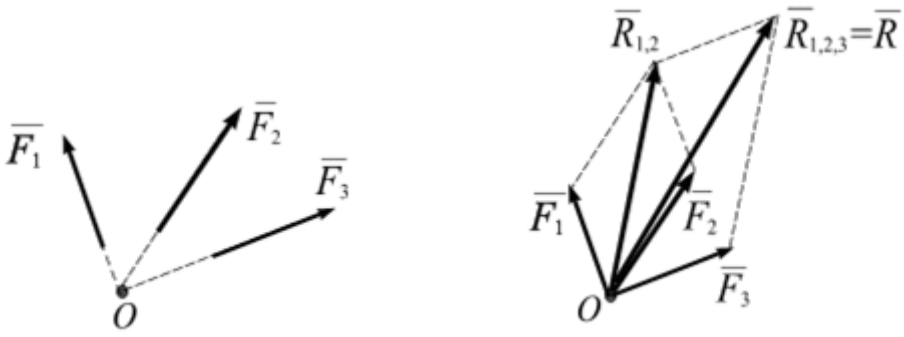
$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \,. \tag{1.1}$$

Доказательство

Пусть система состоит из трех сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (рис. 1.9, *а*), линии действия которых пересекаются в точке *O*. Тогда пользуясь свойством силы, что сила – скользящий вектор, переносим каждую из сил по линии её действия в точку *O*.

Используя 4-ю аксиому статики, две пересекающиеся силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ заменяем равнодействующей $\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Теперь в системе осталось две пересекающиеся силы $\vec{R}_{1,2}$ и $\vec{F}_3$, которые по 4-й аксиоме статики можем заменить одной силой – равнодействующей (рис.1.9, *б*):

$$\vec{R} = \vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 .$$



а *б*

Рис. 1.9

Если сил в системе больше трех, то повторяем вышеприведенные рассуждения и в результате останется одна сила – равнодействующая этой системы сил.

Теорема доказана.

Рассмотрим **способы сложения сил**.

1. Геометрический способ:

а) последовательное построение параллелограмма на двух силах (рис. 1.9, *б*);

б) построение многоугольника из сил системы (рис. 1.10).

2. Аналитический способ – векторы определяются через проекции на координатные оси:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx};\ R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky};\ R_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}. \qquad (1.2)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\ .$$

Условия равновесия системы сходящихся сил.

Необходимое и достаточное условие равновесия для системы сходящихся сил – равнодействующая этой системы сил равна нулю, т. е.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0. \qquad (1.3)$$

Тогда:

1. ***Геометрическое условие равновесия:*** *силовой многоугольник, построенный на силах системы, должен быть замкнут*. Например, для уравновешенной системы из четырех сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ получим рис. 1.11.

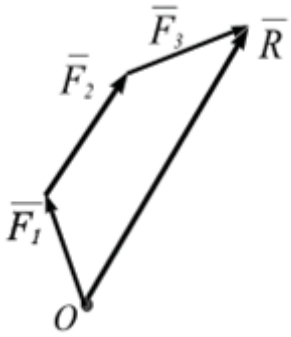


Рис. 1.10

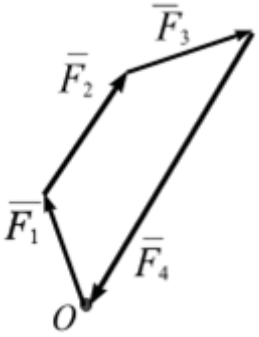


Рис. 1.11

2. ***Аналитические условия:***

а) для пространственной системы сходящихся сил получим систему из трех уравнений (так как вектор определяется тремя проекциями)

$$\begin{cases} 1)\, R_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ 2)\, R_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ 3)\, R_z = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \end{cases} \tag{1.4}$$

б) для плоской системы сходящихся сил останется два уравнения, если все силы лежат в плоскости *Oxy*,

$$\begin{cases} 1)\, R_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ 2)\, R_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

1.4. Момент силы относительно центра

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра *O* называется вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ (рис. 1.12), равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}_A$, соединяющего центр *O* с точкой приложения силы *A*, и силы $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}\,. \tag{1.6}$$

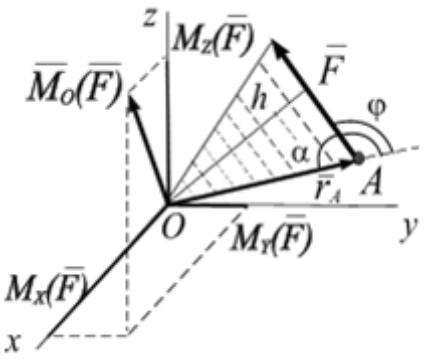


Рис. 1.12

По свойству векторного произведения имеем следующее: вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости $(\vec{r}_A;\vec{F})$ в ту сторону, откуда мы видим поворот первого сомножителя $\vec{r}_A$ на второй $\vec{F}$ на кратчайший угол, происходящий против хода часовой стрелки.

Вычислим модуль $\vec{M}_O(\vec{F})$:

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = \left|\vec{r}_A \times \vec{F}\right| = r_A \cdot F \cdot \sin\varphi =$$

$$= r_A \cdot F \cdot \sin(180° - \alpha) = r_A \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h. \qquad (1.7)$$

Здесь $h = r_A \sin\alpha$, ***h*** называют **плечом силы $\vec{F}$ относительно центра *O***.

Плечо h равно кратчайшему расстоянию от центра O до линии действия силы $\vec{F}$ и определяется длиной перпендикуляра, который опускаем из центра на линию действия силы (рис. 1.12).

Обобщив все вышесказанное, сформулируем **определение момента силы относительно центра**.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называют вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$, приложенный в центре O и направленный перпендикулярно плоскости, содержащей силу и центр, в ту сторону, откуда сила видна стремящейся вращать эту плоскость против хода часовой стрелки.

Модуль $\vec{M}_O(\vec{F})$ равен произведению модуля силы на длину плеча, т. е.

$$\left|\vec{M}_O(\vec{F})\right| = F \cdot h.$$

Физический смысл момента силы относительно центра: $\vec{M}_O(\vec{F})$ *характеризует способность силы вращать тело относительно данного центра.*

Пусть x_A, y_A, z_A – координаты радиуса-вектора $\vec{r}_A$; F_x, F_y, F_z – проекции силы $\overline{F}$ на оси координат, тогда (рис. 1.13)

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}\right) = \vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x\left(\vec{F}\right)\vec{i} + M_y\left(\vec{F}\right)\vec{j} + M_z\left(\vec{F}\right)\vec{k},$$

где

$$M_x(\vec{F}) = \left(y_A F_z - z_A F_y\right);$$

$$M_y(\vec{F}) = \left(z_A F_x - x_A F_z\right);$$

$$M_z(\vec{F}) = \left(x_A F_y - y_A F_x\right). \tag{1.8}$$

Модуль момента $M_O(\vec{F})$, если известны $M_x(\vec{F})$, $M_y(\vec{F})$ и $M_z(\vec{F})$, определяется выражением

$$M_O(\vec{F}) = \sqrt{(M_x(\vec{F}))^2 + (M_y(\vec{F}))^2 + (M_z(\vec{F}))^2}\,. \tag{1.9}$$

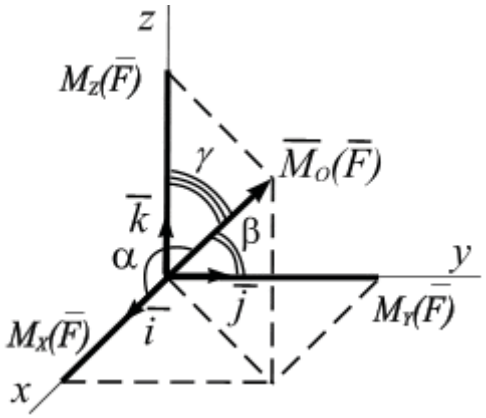


Рис. 1.13

Направление вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ (рис. 1.13) определяется направляющими косинусами:

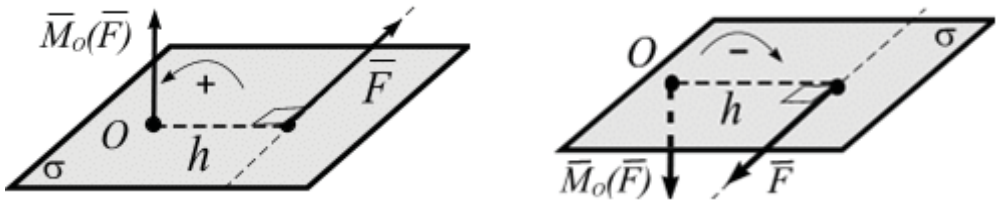
$$\cos\alpha = \frac{M_x(\vec{F})}{M_O(\vec{F})},\ \cos\beta = \frac{M_y(\vec{F})}{M_O(\vec{F})},\ \cos\gamma = \frac{M_z(\vec{F})}{M_O(\vec{F})}. \tag{1.10}$$

Проекции вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$ на оси координат Oxyz $M_x(\vec{F})$, $M_y(\vec{F})$, $M_z(\vec{F})$ называют моментами силы $\vec{F}$ относительно осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Для плоской системы сил (линии действия всех сил и центр лежат в одной плоскости σ), так как векторы моментов всех сил относительно центра направлены по одной линии, перпендикулярной плоскости σ, вводят понятие ***алгебраического момента***.

Алгебраическим моментом силы относительно точки *O* называют величину, равную произведению силы *F* на плечо *h*, взятому с соответствующим знаком (рис. 1.14):

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h\,.$$



$M_O(\overline{F}) = +F \cdot h$ $M_O(\vec{F}) = -F \cdot h$

а *б*

Рис. 1.14

Знак плюс (+), когда сила видна стремящейся вращать плоскость σ против хода часовой стрелки (рис.1.14, *а*).

Знак минус (–), когда сила видна стремящейся вращать плоскость σ по ходу часовой стрелки (рис.1.14, *б*).

1.5. Пара сил

Система двух параллельных сил $\vec{F}; \vec{F}'$, *действующих на абсолютно твердое тело, равных по модулю, направленных в противоположные стороны и не лежащих на одной прямой, называется* ***парой сил*** (рис. 1.15).

Кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары ***d*** *называется* ***плечом пары*** (рис. 1.15).

Пара сил не имеет равнодействующей, но это *неуравновешенная система сил*. *Механическое действие пары – вращение тела.*

Плоскость, проходящая через векторы пары сил, называется плоскостью действия пар. Момент пары сил является вектором, равным моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы:

$$\vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}' = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} \,. \qquad (1.11)$$

Соответственно, *вектор момента пары* $\vec{M}$ *направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся вращать эту плоскость против хода часовой стрелки. Модуль пары сил равен произведению модуля одной из сил пары на плечо пары:*

$$\left|\vec{M}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \vec{F}'\right| = F \cdot d \,.$$

Момент пары – свободный вектор (может быть приложен к любой точке тела).

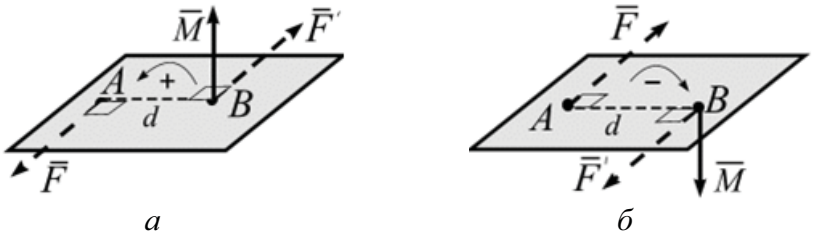


Рис. 1.15

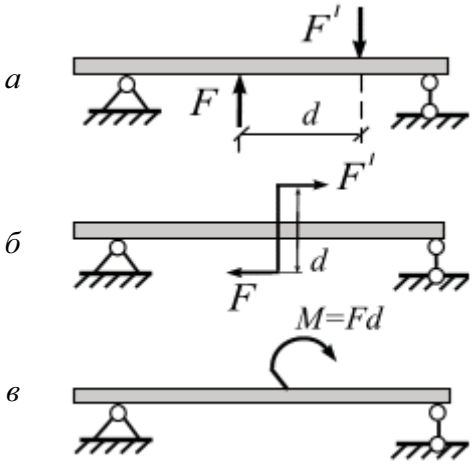


Рис. 1.16

В случае плоской системы сил векторы моментов всех пар направлены вдоль одной линии, перпендикулярной плоскости, в которой расположены силы. Поэтому вводят понятие *алгебраического момента пары*.

Момент *положительный,* когда пара стремится повернуть тело против часовой стрелки (рис. 1.15, *а*), и *отрицательный* – по ходу часовой стрелки (рис. 1.15, *б*).

$$M = \pm F \cdot d. \qquad (1.12)$$

Для упрощения рассмотрения расчетной схемы пару сил (рис. 1.16, *а*) изображают или в виде двух параллельных сил (рис. 1.16, *б*), или дуговой стрелкой по направлению вращения пары (рис. 1.16, *в*).

1.6. Связи и их реакции

Свободным называют тело, движение которого в пространстве ничем не ограничено. Если же движение тела ограничено, то такое тело называют *несвободным*.