

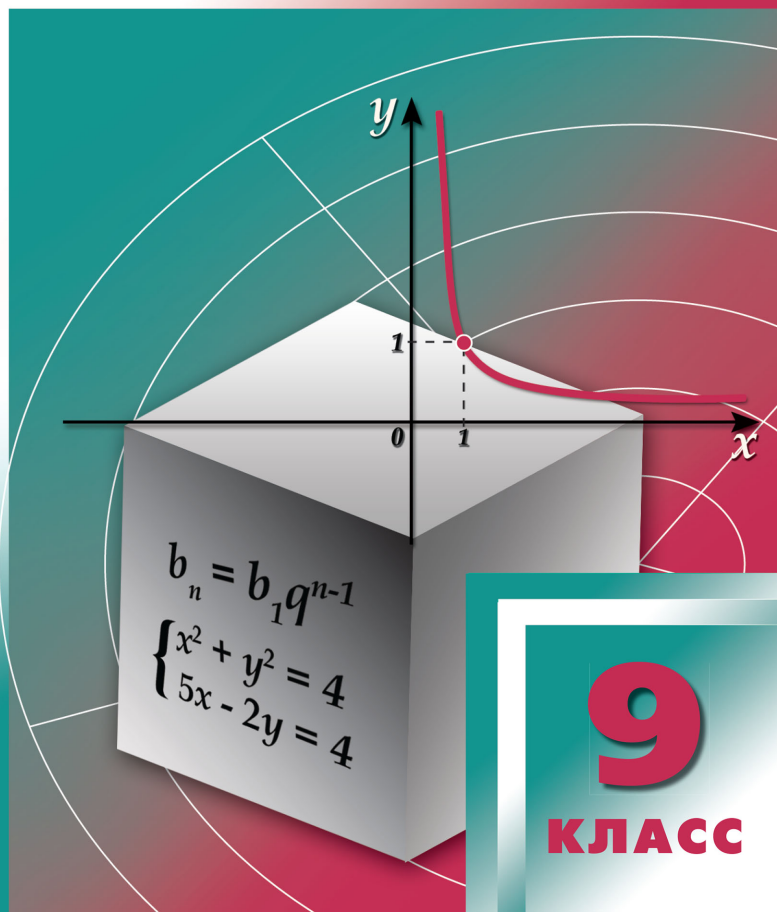
В ПОМОЩЬ ШКОЛЬНОМУ УЧИТЕЛЮ

А.Н. РУРУКИН, И.А. МАСЛЕННИКОВА, Т.Г. МИШИНА

ПОУРОЧНЫЕ РАЗРАБОТКИ

по АЛГЕБРЕ

К УМК А.Г. Мордковича и др.



9

КЛАСС

УДК 372:851
ББК 74.262.21
Р87

Рурукин А.Н.

Р87 Поурочные разработки по алгебре. 9 класс : пособие для учителя / А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина. — 2-е изд., эл. — 1 файл pdf : 288 с. — Москва : ВАКО, 2020. — (В помощь школьному учителю). — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-408-05236-3

Пособие предлагает полный комплект поурочных разработок по алгебре для 9 класса, ориентированных на педагогов, работающих по учебному комплексу А.Г. Мордковича (М.: Мнемозина). Издание содержит все, что необходимо для качественной подготовки к урокам: подробные поурочные планы, методические советы и рекомендации, творческие задания, самостоятельные, контрольные и зачетные работы с подробным разбором. Предлагаемый материал достаточен для проведения полноценных уроков в классах и группах различного уровня, позволяет не только глубоко изучить программу 9 класса по предмету, но и подготовить учащихся к сдаче ГИА.

Может быть использовано как начинающими педагогами, так и преподавателями со стажем.

Подходит к учебникам «Алгебра» в составе УМК А.Г. Мордковича, П.В. Семёнова 2007–2015 гг. выпуска, также выходившим в качестве учебного пособия в 2016–2019 гг.

**УДК 372:851
ББК 74.262.21**

Электронное издание на основе печатного издания: Поурочные разработки по алгебре. 9 класс : пособие для учителя / А.Н. Рурукин, И.А. Масленникова, Т.Г. Мишина. — Москва : ВАКО, 2014. — 288 с. — (В помощь школьному учителю). — ISBN 978-5-408-01541-2. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-408-05236-3

© ООО «ВАКО», 2014

Глава 1

Рациональные неравенства и их системы

В этой главе будет рассмотрено решение основных видов алгебраических неравенств: линейных, квадратных и рациональных, а также их систем. Подобные неравенства возникают при исследовании функций, в текстовых задачах, в задачах на прогрессии и др.

Урок 1. Основные понятия и свойства неравенств

Цель: рассмотреть основные понятия, связанные с неравенствами.

Ход урока

I. Сообщение темы и цели урока

II. Изучение нового материала

Частично этот материал изучался в конце 8 класса. Теперь необходимо его упорядочить и систематизировать.

Рассмотрим неравенство $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ – функция, зависящая от переменной x , $\vee$ – знак сравнения (может совпадать с одним из четырех знаков: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$). Решением этого неравенства (или частным решением) называют такое значение переменной x , которое обращает неравенство $f(x) \vee 0$ в верное числовое неравенство. Множество всех частных решений неравенства называют общим решением (или решением) неравенства.

Пример 1

Числа 3; 1,6; $\sqrt{5}$; π – частные решения неравенства $2x - 3 \geq 0$ (в этом легко убедиться подстановкой таких решений в данное неравенство). Числа x , удовлетворяющие условию $x \geq 1,5$, являются общим решением приведенного неравенства.

Применяются различные формы записи неравенств. В частности, используя перенос в другую часть неравенства его членов (с изменением их знаков на противоположные), мы имеем право записать общий вид неравенства в форме $f(x) \vee g(x)$ (хотя, на наш взгляд, переход от одной формы записи неравенства к другой в учебнике неоправдан).

Два неравенства $f(x) \vee g(x)$ и $r(x) \vee s(x)$ называют равносильными, если они имеют одинаковые решения или решений не имеют. Можно дать и другое определение: два неравенства равносильны, если любое частное решение первого неравенства является частным решением второго и, наоборот, любое частное решение второго неравенства является частным решением первого.

Пример 2

а) Неравенства $(2x^2 + 1)(2x - 3) \geq 0$ и $2x \geq 3$ равносильны, так как имеют одинаковые решения: $x \geq 1,5$.

б) Неравенства $2x^2 + 1 < 0$ и $3|x| + 2 < 0$ равносильны, так как каждое из них не имеет решений.

в) Неравенства $2x - 3 \geq 0$ и $(2x - 3)(4x - 20) \leq 0$ неравносильны, так как решение первого неравенства $x \geq 1,5$, второго неравенства $-1,5 \leq x \leq 5$. Таким образом, решения второго неравенства составляют только часть решений первого неравенства.

При решении неравенства его заменяют более простым равносильным неравенством. Такую замену называют **равносильным преобразованием неравенства**. Для этих преобразований используются три правила.

Правило 1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знак неравенства.

Пример 3

Неравенство $3x + 4 < x^2$ равносильно неравенству $0 < x^2 - 3x - 4$, так как члены $3x$ и 4 перенесены в правую часть с противоположным знаком, а знак неравенства оставили неизменным.

Правило 2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не меняя при этом знак неравенства.

Пример 4

Неравенство $16x + 8 \geq 20x^2$ равносильно неравенству $4x + 2 \geq 5x^2$: обе части неравенства разделили на положительное число 4, а знак неравенства сохранили.

Правило 3. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Пример 5

Неравенство $-3x^2 + 5x + 1 \geq 0$ равносильно неравенству $3x^2 - 5x - 1 \leq 0$, так как обе части первого неравенства умножили на

отрицательное число (-1) и изменили знак неравенства на противоположный.

Правила 2 и 3 можно и нужно обобщить.

Правило 2*. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x , и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

Пример 6

Неравенство $\frac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}} \geq 0$ равносильно неравенству $2x-3 \geq 0$, так

как обе части первого неравенства умножили на выражение $p(x) = \sqrt{x^2+1}$, положительное при всех значениях x , и сохранили знак неравенства.

Правило 3*. Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное при всех значениях x , и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Пример 7

Неравенство $(-x^4 - 1)(2x - 3) \geq 0$ равносильно неравенству $2x - 3 \leq 0$, так как обе части первого неравенства разделили на выражение $p(x) = -x^4 - 1 = -(x^4 + 1)$, отрицательное при всех значениях x , и изменили знак неравенства на противоположный.

Заметим, что *формулировки* правил 2* и 3* очень *важны*: только при соблюдении их условий получаются равносильные неравенства.

Пример 8

Неравенство $\frac{2x-3}{x^2-1} \geq 0$, разумеется, неравносильно неравенству

$2x - 3 \geq 0$, так как выражение $p(x) = x^2 - 1$ в зависимости от x может иметь и положительный, и отрицательный знак. Поэтому просто умножить обе части данного неравенства на выражение $p(x) = x^2 - 1$ нельзя. Исходное неравенство равносильно двум системам нера-

венств $\begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ x^2-1 > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x^2-1 < 0. \end{cases}$ Проще всего решить данное нера-

венство, разумеется, методом интервалов (который будет изложен позже).

III. Контрольные вопросы

1. Частное и общее решения неравенства.

2. Понятие равносильных неравенств.
3. Равносильные преобразования неравенств.
4. Три правила равносильных преобразований неравенств (фронтальный опрос).

IV. Задания на уроке и дома

1. Является ли данное число a решением неравенства?
 - а) $3x - 2 \geq 4$; $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$, $a = \pi$, $a = 5$;
 - б) $3 - 4x > -11$; $a = -3$, $a = 2$, $a = \pi$, $a = 4$, $a = 6$;
 - в) $|2x - 1| \geq 3$; $a = -2$, $a = -1$, $a = 0$, $a = 2$, $a = 4$;
 - г) $|2 - 3x| < 4$; $a = -\sqrt{3}$, $a = 1$, $a = 2$, $a = \pi$, $a = 4$;
 - д) $3x^2 \geq 4 - 4x$; $a = -3$, $a = -\sqrt{2}$, $a = -1$, $a = 1$, $a = \frac{\pi}{2}$;
 - е) $2x^2 + 5x - 3 < 0$; $a = -4$, $a = -\sqrt{5}$, $a = -1$, $a = 2$, $a = \pi$.
2. Являются ли данные неравенства равносильными и объясните почему:

а) $3x^2 \geq 2x + 1$ и $3x^2 - 4x \geq 1 - 2x$;

б) $2x^2 - 3x \geq 1$ и $2x^2 + 3x > 6x + 1$;

в) $(|x| + 1)(3 - 2x) \geq 0$ и $3 - 2x \geq 0$;

г) $(-2x^2 - 3)(5 + 2x) \leq 0$ и $5 + 2x \geq 0$;

д) $\frac{4x - 5}{\sqrt{x^2 + 2}} > 0$ и $4x - 5 > 0$;

е) $-\sqrt{x^4 + 1}(3x + 2) \leq 0$ и $3x + 2 \geq 0$;

ж) $\frac{2x^2 - 3}{2x + 5} < 0$ и $2x^2 - 3 < 0$;

з) $\frac{x^2}{x + 3} - 2 \geq 0$ и $\frac{x^2 - 2x - 6}{x + 3} \geq 0$.

V. Подведение итогов урока

Уроки 2–3. Линейные и квадратные неравенства

Цель: напомнить решение линейных и квадратных неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (письменный опрос).

Вариант 1

1. Второе правило равносильных преобразований неравенств.
2. Является ли данное число a решением неравенства?
 $2x^2 + x - 3 \leq 0$; $a = -3$, $a = -1$, $a = 1$, $a = 2$.
3. Являются ли данные неравенства равносильными и почему:
 - а) $2|x| + 3 \leq 0$ и $3x^2 + 2 < 0$;
 - б) $\frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + 3}} \geq \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$ и $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$.

Вариант 2

1. Третье правило равносильных преобразований неравенств.
2. Является ли данное число a решением неравенства?
 $3x^2 - 5x - 2 \geq 0$; $a = -2$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$.
3. Являются ли данные неравенства равносильными и почему:
 - а) $3x^2 + 7 > 0$ и $4|x| + 5 \geq 0$;
 - б) $x^2(x^2 + 1) \leq (x + 2)(x^2 + 1)$ и $x^2 - x - 2 \leq 0$.

III. Изучение нового материала

Неравенство $f(x) > 0$ называют по типу функции $f(x)$. **Линейным неравенством** называют неравенство вида $ax + b > 0$, так как функция $f(x) = ax + b$ линейная. **Квадратным неравенством** называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, так как функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ квадратная (или квадратичная). Напомним решение линейных и квадратных неравенств, которое основано на результатах предыдущего урока. Сначала рассмотрим наиболее типичные линейные неравенства.

Пример 1

Решим неравенство $\frac{2x - 7}{6} + \frac{7x - 2}{3} \leq 3 - \frac{1 - x}{2}$.

Чтобы избавиться от знаменателей дробей, умножим обе части неравенства на наименьшее общее кратное знаменателей дробей НОК $(6, 3, 2) = 6$. Так как число 6 положительное, то сохраним знак неравенства и по правилу 2 получим равносильное неравенство:

$$6\left(\frac{2x - 7}{6} + \frac{7x - 2}{3}\right) \leq 6\left(3 - \frac{1 - x}{2}\right), \text{ или } 2x - 7 + 2(7x - 2) \leq 18 - 3(1 - x),$$

или $2x - 7 + 14x - 4 \leq 18 - 3 + 3x$. В каждой части неравенства приведем подобные члены: $16x - 11 \leq 15 + 3x$. Перенесем члены, содержащие x , в левую часть неравенства, числа – в правую часть. При этом изменим знаки таких членов на противоположные и сохраним знак неравенства. По правилу 1 получаем равносильное неравенство $16x - 3x \leq 15 + 11$. В каждой части неравенства вновь приведем подобные члены: $13x \leq 26$. Чтобы найти решение неравенства, разделим обе его части на положительное число 13 и по правилу 2 получим $x \leq 2$ или $x \in (-\infty; 2]$.

Часто встречаются **двойные линейные неравенства**.

Пример 2

Решим неравенство $2 < 3 - \frac{2}{3}x \leq 4$.

Из всех частей неравенства вычтем число 3 и сохраним знаки неравенства. По правилу 1 (его можно трактовать и иначе: если из обеих частей неравенства вычесть один и тот же член и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному) имеем равносильное неравенство: $2 - 3 < 3 - \frac{2}{3}x - 3 \leq 4 - 3$

или $-1 < -\frac{2}{3}x \leq 1$. Умножим все части неравенства на отрица-

тельное число $\left(-\frac{3}{2}\right)$ и изменим знаки неравенства на противо-

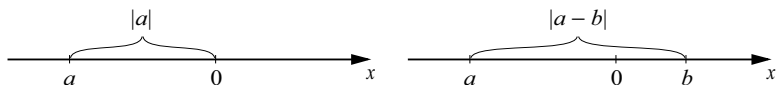
положные. По свойству 3 получим равносильное неравен-

ство: $-1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) > \left(-\frac{2}{3}x\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \geq 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$, или $1,5 > x \geq -1,5$, или

$x \in [-1,5; 1,5)$.

Также распространены неравенства, содержащие знаки модуля. Сначала напомним **определение модуля**. Модулем числа (выражения) a называют число (выражение) a , если a неотрицательно, и число (выражение) с противоположным знаком $(-a)$, если a отрицательно, т. е. $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$ Геометрический смысл $|a|$ – рас-

стояние от точки a до точки 0 на координатной оси, т. е. $|a| = \rho(a; 0)$ (см. рис.). Геометрический смысл $|a - b|$ – расстояние между точками a и b на координатной оси, т. е. $|a; b| = \rho(a; b)$.

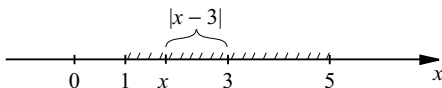


Для решения простейших неравенств достаточно геометрического смысла модуля.

Пример 3

Решим неравенство $|x - 3| \leq 2$.

Геометрический смысл данного неравенства: надо на координатной прямой найти такие точки x , для которых расстояние до точки 3 не больше 2. Посчитаем границы этого диапазона: $3 - 2 = 1$ и $3 + 2 = 5$. Тогда решение данного неравенства – интервал $[1; 5]$.



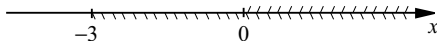
В более сложных случаях необходимо использовать определение модуля.

Пример 4

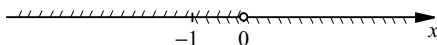
Решим неравенство $|x| \leq 2x + 3$.

Используя определение модуля, надо рассмотреть два случая.

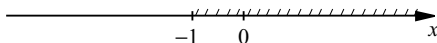
а) Если $x \geq 0$, то данное неравенство имеет вид $x \leq 2x + 3$. Его решение $x \geq -3$ или интервал $x \in [-3; +\infty)$. Однако условию $x \geq 0$ удовлетворяет только часть этого решения – промежуток $x \in [0; +\infty)$, что и является решением данного неравенства в этом случае.



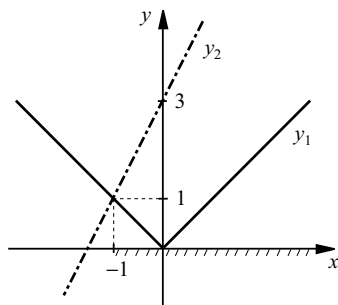
б) Если $x < 0$, то исходное неравенство имеет вид $-x \leq 2x + 3$ или $-3 \leq 3x$, откуда $x \geq -1$. С учетом условия $x < 0$ получаем решение данного неравенства в этом случае – интервал $x \in [-1; 0)$.



Учитывая результаты случаев а и б, найдем окончательное решение данного неравенства – промежуток $x \in [-1; +\infty)$.



Данное неравенство допускает простое и наглядное **графическое решение**. Построим графики функций $y_1 = |x|$ и $y_2 = 2x + 3$.



Смысл неравенства $y_1 \leq y_2$: надо найти такие значения x , при которых график функции y_1 расположен не выше графика функции y_2 . Эти графики пересекаются в точке $(-1; 1)$. Видно, что неравенство выполняется при $x \in [-1; +\infty)$.

Другой разновидностью линейных неравенств являются **неравенства с параметрами**.

Пример 5

При всех значениях параметра p решим неравенство $(p-3)x \geq p^2 - 9$.

Другими словами, для каждого значения параметра p надо указать, при каких значениях x неравенство выполняется. Очевидно, что данное неравенство является линейным по переменной x . Чтобы найти x , надо обе части исходного неравенства разделить на коэффициент при x , т. е. на $p-3$. Но эта величина может иметь разный знак. Поэтому по правилам 2 и 3 получим разный результат. Значит, надо рассмотреть три случая.

а) Если $p-3 < 0$ (т. е. $p < 3$), то по правилу 3 получаем: $x \leq \frac{p^2 - 9}{p-3}$,

или $x \leq p+3$, или $x \in (-\infty; p+3]$. Заметим, что при этом знак неравенства изменился на противоположный.

б) Если $p-3 = 0$ (т. е. $p = 3$), то, разумеется, делить обе части данного неравенства на выражение $p-3$ нельзя. Поэтому подставим значение $p = 3$ в исходное неравенство. Получим неравенство $0 \cdot x \geq 0$, которое выполняется при всех значениях x . Поэтому решение неравенства в этом случае: $x \in (-\infty; +\infty)$.

в) Если $p-3 > 0$ (т. е. $p > 3$), то по правилу 2 получаем: $x \geq \frac{p^2 - 9}{p-3}$, или $x \geq p+3$, или $x \in [p+3; +\infty)$. Отметим, что при

этом знак неравенства сохранился.

Обратим внимание **на форму записи ответа**. Ответ принято записывать в порядке возрастания параметра, и решение неравенств приводить в виде числовых промежутков. Итак, ответ: при $p \in (-\infty; 3)$ $x \in (-\infty; p+3]$, при $p = 3$ $x \in (-\infty; +\infty)$, при $p \in (3; +\infty)$ $x \in [p+3; +\infty)$.

Теперь рассмотрим решение квадратных неравенств. Подобные неравенства удобно решать графически.

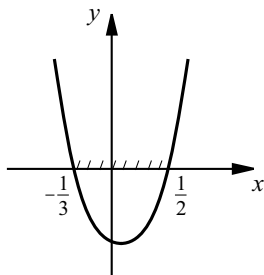
Решение сводится к нахождению промежутков x , в которых функция $y = ax^2 + bx + c$ имеет положительные или отрицательные значения. Для этого надо определить, как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ в координатной плоскости: направление ветвей параболы (вверх или вниз) и точки пересечения ее с осью x (если они имеются). Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 6

Решим неравенство $6x^2 - x - 1 \leq 0$.

Рассмотрим функцию $y = 6x^2 - x - 1$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $6x^2 - x - 1 = 0$.

Его корни $x_1 = -\frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{2}$.

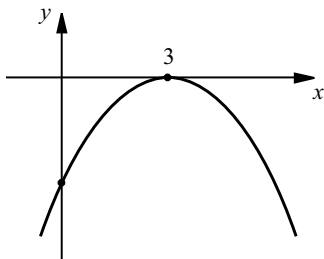


Нарисуем график. Видно, что функция принимает неположительные значения на промежутке $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$. Поэтому этот промежуток и является решением данного неравенства.

Пример 7

Решим неравенство $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 \geq 0$.

Рассмотрим функцию $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$. Ее графиком является парабола с ветвями, направленными вниз. Найдем точки пересечения параболы с осью абсцисс. Для этого решим уравнение $-\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0$. Оно имеет единственный корень $x = 3$. Поэтому парабола касается оси абсцисс в точке $x = 3$.



Нарисуем график. Видно, что функция принимает неотрицательные значения (а именно $y = 0$) только в единственной точке $x = 3$. Поэтому данное неравенство имеет решение $x = 3$.

Из рассмотренных примеров уже можно сформулировать **алгоритм решения** неравенства $ax^2 + bx + c < 0$.

1) Определяют направление ветвей параболы: при $a > 0$ – вверх, при $a < 0$ – вниз.

2) Находят дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и определяют, имеет ли трехчлен корни.

3) Если трехчлен имеет корни, то отмечают их на оси абсцисс. С учетом направления ветвей строим эскиз параболы, проходящий через построенные на оси x точки.

4) Если трехчлен не имеет корней, строим эскиз параболы, расположенный в верхней полуплоскости при $a > 0$ и в нижней полуплоскости при $a < 0$.

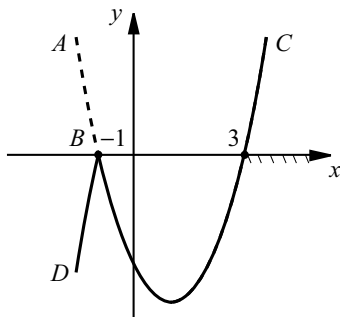
5) Находят на оси x промежутки, для которых выполнено данное неравенство.

Разумеется, графический способ может быть использован и для решения более сложных неравенств.

Пример 8

Решим неравенство $|x + 1| (x - 3) \geq 0$.

Рассмотрим функцию $y = |x + 1|(x - 3)$ и построим ее график. Для этого раскроем знак модуля, рассмотрев два случая. При $x \geq -1$ получаем функцию $y = (x + 1)(x - 3)$. Ее графиком является парабола, направленная ветвями вверх и проходящая через точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Из этой параболы сохраним участок BC , для которого $x \geq -1$.



При $x < -1$ получаем функцию $y = -(x + 1)(x - 3)$, которая отличается от предыдущей только знаком. Поэтому участок AB (для $x < -1$) предыдущей параболы отражаем зеркально вниз и получаем часть BD требуемого графика. Таким образом, построен график данной функции.

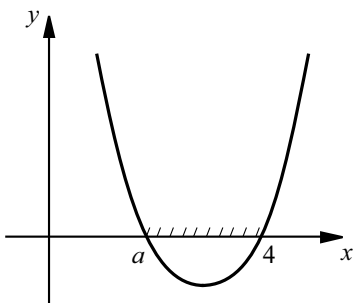
Видно, что данное неравенство ($y \geq 0$) выполняется для отдельной точки $x = -1$ и в промежутке $[3; +\infty)$. Поэтому решение неравенства $x \in \{-1\} \cup [3; +\infty)$.

Пример 9

Решим неравенство $x^2 - (a + 4)x + 4a \leq 0$.

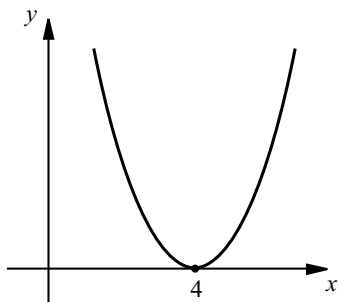
Найдем дискриминант квадратного трехчлена $D = (a + 4)^2 - 4 \cdot 4a = a^2 + 8a + 16 - 16a = (a - 4)^2$ и его корни $x = \frac{a + 4 \pm (a - 4)}{2}$, т. е. $x_1 = a$ и $x_2 = 4$. Поэтому графиком квадратичной функции $y = x^2 - (a + 4)x + 4a$ является парабола, направленная ветвями вверх и имеющая с осью абсцисс две или одну общие точки. Поэтому необходимо рассмотреть три случая.

а) Пусть $x_1 < x_2$, т. е. $a < 4$. Соответствующий график приведен на рисунке.



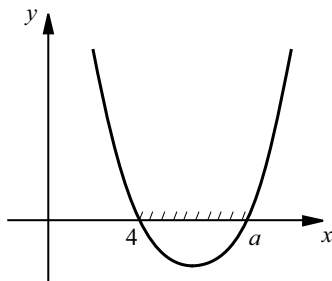
Видно, что значения функции $y \leq 0$ на промежутке $[a; 4]$. Этот промежуток является решением неравенства в данном случае.

б) Пусть $x_1 = x_2$, т. е. $a = 4$. В этом случае парабола касается оси абсцисс в точке $x = 4$. Соответствующий график приведен на рисунке.



Видно, что значения функции или положительны или значение равно нулю. Последнее имеет место только в точке $x = 4$. Эта точка и является решением неравенства в этом случае.

в) Пусть $x_1 > x_2$, т. е. $a > 4$. График приведен на рисунке.



Видно, что значения функции $y(x)$ неположительны на промежутке $[4; a]$. Этот промежуток является решением неравенства для данного случая.

Учитывая три рассмотренные ситуации, запишем окончательный ответ задачи: при $a \in (-\infty; 4)$ $x \in [a; 4]$, при $a = 4$ $x = 4$, при $a \in (4; +\infty)$ $x \in [4; a]$.

Рассмотрим наиболее удобный и **универсальный способ** решения любых неравенств – **метод интервалов**. Он с успехом может быть использован при решении всех типов неравенств, изучаемых в школе. Пока мы рассмотрим применение этого способа для целых и рациональных неравенств. Суть метода интервалов будет понятна из следующего примера.

Пример 10

Решим неравенство $x^2 + 2x - 3 \leq 0$.



На числовой оси отметим корни уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$: $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Эти точки разбили числовую ось на три промежутка: $x \in (-\infty; -3)$; $x \in [-3; 1]$ и $x \in (1; +\infty)$.

При $x \in (-\infty; -3)$ в многочлене $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ оба сомножителя отрицательны. Поэтому многочлен $x^2 + 2x - 3 > 0$ (отмечено знаком «+») и неравенство не выполнено.

Для $x \in [-3; 1]$ множитель $(x + 3)$ становится неотрицательным, множитель $(x - 1)$ по-прежнему отрицательный. Поэтому произведение $(x + 3)(x - 1) \leq 0$ (отмечено знаком «-») и неравенство выполнено. Следовательно, интервал $x \in [-3; 1]$ удовлетворяет неравенству.

При $x \in (1; +\infty)$ сомножители $(x + 3)$ и $(x - 1)$ положительны, произведение $(x + 3)(x - 1) > 0$ (отмечено знаком «+») и неравенство не выполнено.

Заметим, что столь детальный анализ знаков при решении квадратных неравенств является излишним. Достаточно определить знак выражения $x^2 + 2x - 3$ в одной точке, не совпадающей с границами интервалов (например, при $x = -10$ выражение $x^2 + 2x - 3 = (-10)^2 + 2(-10) - 3 = 77 > 0$). Кроме того, надо учесть, что при

переходе к каждому следующему промежутку знак выражения $x^2 + 2x - 3$ меняется на противоположный. Поэтому диаграмма знаков, приведенная на рисунке, может быть получена сразу (решение неравенства отмечено штриховкой).

IV. Контрольные вопросы

1. Какое неравенство называется линейным?
2. Определение квадратного неравенства.
3. Модуль числа (выражения) и его геометрический смысл.

V. Задание на уроках

§ 1, № 2 (а); 3 (в, г); 4 (а); 7 (а, г); 10 (в, г); 14 (а, б); 17 (б); 19 (а, б); 21 (а); 22 (в, г); 24.

VI. Задание на дом

§ 1, № 2 (б); 3 (а, б); 4 (в); 7 (б, в); 10 (а, б); 14 (в, г); 17 (г); 19 (в, г); 21 (б); 22 (а, б); 25.

VII. Подведение итогов уроков

Уроки 4–6. Рациональные неравенства

Цель: рассмотреть метод интервалов для решения неравенств.

Ход уроков

I. Сообщение темы и цели уроков

II. Повторение и закрепление пройденного материала

1. Ответы на вопросы по домашнему заданию (разбор нерешенных задач).
2. Контроль усвоения материала (тест).

Вариант 1

1. Решите неравенство $6x^2 - 13x + 6 \leq 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right]$; г) $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. Решите неравенство $-25x^2 + 20x - 4 \geq 0$.

Ответы: а) $(-\infty; 0,4]$; б) $[0,4; +\infty)$; в) $\emptyset$; г) $0,4$.

3. Решите неравенство $x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$.

Ответы: а) $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$; б) $[1; 2]$; в) $[2; +\infty)$; г) $[-1; 1]$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $15x^2 - 34x + 15 \geq 0$.

Ответы: а) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right]$; б) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$; г) $\left[\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right]$.

2. Решите неравенство $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$.

Ответы: а) $\frac{2}{3}$; б) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$; в) $\emptyset$; г) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

3. Решите неравенство $x^2 - 5|x| + 6 \geq 0$.

Ответы: а) $(-\infty; -3]$; б) $[-2; 2]$; в) $[3; +\infty)$;
г) $(-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; +\infty)$.

III. Изучение нового материала

Рациональным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $h(x) \vee g(x)$, где $h(x)$ и $g(x)$ – рациональные выражения (функции). Напомним, что рациональное выражение – алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень.

Пример 1

а) Выражения $3x^2 + 5$, $\frac{7y^4 - 5}{2y + 3}$, $\frac{8z^5 + 3z^4 - 2}{z}$ рациональные (по определению).

б) Выражения $\sqrt{x+3}$, $\frac{\sqrt{y}}{y+2}$, $\frac{\sqrt{3z^2+1}}{\sqrt{z}-2}$ иррациональные, так как содержат операцию извлечения квадратного корня.

Решение рациональных неравенств происходит по стандартной схеме.

1) С помощью правил равносильных преобразований неравенство $h(x) \vee g(x)$ записывают в виде $f(x) \vee 0$, где $f(x)$ – алгебраическая дробь (в частности, $f(x)$ может быть и многочленом).

2) Находим корни числителя и знаменателя дроби $f(x)$ (или раскладываем на множители числитель и знаменатель дроби $f(x)$).

3) Используют метод интервалов.

На предыдущем уроке метод интервалов был использован для решения квадратных неравенств. Теперь необходимо рассмотреть применение этого метода для решения более сложных неравенств,

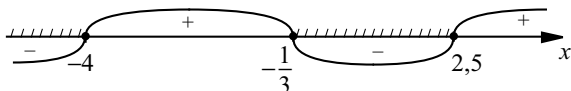
в первую очередь рациональных неравенств. Чтобы понять особенности использования метода интервалов, приведем ряд примеров. Сначала рассмотрим решение неравенств высоких степеней.

Пример 2

Решим неравенство $(2x - 5)(x + 4)(3x + 1) \leq 0$.

Данное неравенство уже записано в виде $f(x) \leq 0$, и выражение $f(x)$ уже разложено на множители (т. е. пункты 1 и 2 уже выполнены условием задачи). Осталось применить метод интервалов.

Найдем корни выражения $f(x) = (2x - 5)(x + 4)(3x + 1)$. Ими являются числа $x_1 = 2,5$, $x_2 = -4$, $x_3 = -\frac{1}{3}$. Очевидно, что знак выражения $f(x)$ может измениться только в этих точках. Отметим числа x_1 , x_2 и x_3 на координатной прямой. Они разбили числовую ось на четыре промежутка, на каждом из которых выражение $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Определим знак выражения $f(x)$ в любой точке (кроме трех отмеченных).



Например, при $x = 5$ каждый из трех множителей выражения $f(x)$ положительный. Поэтому и все выражения $f(x) > 0$. Строим диаграмму знаков выражения $f(x)$ и выписываем решение данного неравенства: $x \in (-\infty; -4] \cup \left[-\frac{1}{3}; 2,5\right]$.

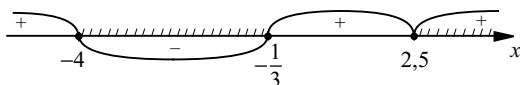
Слегка изменим условие задачи.

Пример 3

Решим неравенство $(2x - 5)^2(x + 4)(3x + 1) \leq 0$.

Отличие от предыдущего примера состоит в первом множителе: $(2x - 5)^2$ вместо $(2x - 5)$. Однако это приводит к совершенно другому ответу.

В данном примере в точке $x = 2,5$ знак выражения $f(x)$ не меняется. Действительно, при всех значениях x (кроме $x = 2,5$) выражение $(2x - 5)^2 > 0$. Поэтому знак $f(x)$ меняется только в точках $x_1 = -4$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$. В соответствии с этим диаграмма знаков выражения $f(x)$ имеет другой вид.



Учитывая, что данное неравенство нестрогое, то его решением являются числовой промежуток и отдельная точка:

$$x \in \left[-4; -\frac{1}{3}\right] \cup \{2,5\}.$$

Если сравнить этот ответ с ответом предыдущей задачи, то видны существенные и принципиальные различия.

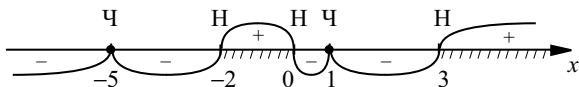
Рассмотрим более сложные примеры.

Пример 4

Решим неравенство $(x+5)^8(x+2)^3x(x-1)^2(x-3)^7 \geq 0$.

Прежде всего отметим, что если в разложение многочлена на множители входит сомножитель $(x-x_0)^k$, то говорят, что x_0 – корень многочлена кратности k . Для решения неравенства важно знать, является ли k четным или нечетным числом, так как при k четном многочлен справа и слева от x_0 имеет один и тот же знак (т. е. знак многочлена не меняется), а при k нечетном многочлен справа и слева от x_0 имеет противоположные знаки (т. е. знак многочлена изменяется).

Вернувшись к данному неравенству, отметим, что многочлен имеет корни $x_1 = -5$ (кратности 8 – четная кратность), $x_2 = -2$ (кратности 3 – нечетная), $x_3 = 0$ (кратности 1 – нечетная), $x_4 = 1$ (кратности 2 – четная), $x_5 = 3$ (кратности 7 – нечетная). Нанесем эти корни на числовую ось и буквами Н и Ч отметим четность кратности этих корней.



Определим знак многочлена, стоящего в левой части неравенства при любом x , не совпадающем с корнями (например, при $x = -3$ многочлен отрицательный). Рассмотрим теперь знаки многочлена, двигаясь в положительном направлении оси $0x$. Так как $x = -2$ – корень нечетной кратности, то при этом значении x происходит изменение знака многочлена на противоположный и многочлен на промежутке $(-2; 0)$ положительный. При $x = 0$ (корень нечетной кратности) опять происходит изменение знака многочлена и он на промежутке $(0; 1)$ становится отрицательным. Так как $x = 1$ – корень четной кратности, то многочлен знак не меняет и на промежутке $(1; 3)$ он по-прежнему отрицательный. Рассуждая подобным

Оглавление

Предисловие	3
Рекомендации к проведению уроков	4
Тематическое планирование учебного материала	9
Глава 1. Рациональные неравенства и их системы	10
Глава 2. Системы уравнений	61
Глава 3. Числовые функции	122
Глава 4. Прогрессии	182
Глава 5. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей	221
Итоговое повторение	247
Государственная итоговая аттестация по алгебре (ГИА) ...	264
Литература	284