МОНОГРАФИЯ

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

В.Б. Гисин
Б.А. Путко

МАТЕМАТИКА ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ: МОДЕЛИ И МЕТОДЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

УДК 004.451(073)
ББК 65.26в631
Г 51

Рецензенты:

Чечкин А.В., д.ф.-м.н., профессор департамента математики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации;

Диденко С.А., к.э.н., руководитель лаборатории управленческих нейронаук, Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации.

Гисин В.Б.

Г 51 Математика финансовых инструментов: модели и методы: Монография / В.Б. Гисин, Б.А. Путко. — М.: Прометей, 2021. — 190 с.

ISBN 978-5-00172-094-2

В монографии дается анализ основных моделей и методов, применяемых для расчетов, связанных с акциями и производными инструментами фондовых рынков. Изложение концепций современной финансовой математики построено так, чтобы оно было доступно выпускнику экономического вуза. Хотя чтение книги потребует от него определенных усилий. Специалист, получивший математическое образование, прочитав книгу, познакомится с важными и интересными аспектами применения статистки и теории случайных процессов. Изложение достаточно компактно, но при этом дает читателю представление о современном состоянии области знаний, возникшей на стыке математики и теории финансов.

ISBN 978-5-00172-094-2

Оглавление

Глава 1
ПОНЯТИЕ ФИНАНСОВОГО ИНСТРУМЕНТА

Финансовый инструмент как математический объект

Финансовый инструмент определяется как договор, по которому у одной стороны появляются активы, а у другой — финансовые обязательства. В соответствии с договором происходит обмен платежами. В математических моделях финансовый инструмент задается потоком платежей — входящих (положительных) и исходящих (отрицательных). Чтобы задать поток платежей нужно указать моменты времени платежей и способ формирования размеров платежей.

Платежи условно разделяются на детерминированные и случайные. Финансовые инструменты с детерминированными платежами — это в первую очередь облигации. Финансовые инструменты со случайными платежами — это ценные бумаги, котирующиеся на рынке. Ценными бумагами, котирующимися на рынке, могут быть и облигации.

Так как постоянные величины, вообще говоря, можно рассматривать как частный случай случайных величин, то в общем случае финансовый инструмент может быть представлен случайным процессом $C(t)$ — потоком платежей.

В финансовой экономике рассматриваются модели как с дискретным, так и с непрерывным временем. В моделях с дискретным временем поток платежей составлен из последовательности платежей. В каждый момент времени известны значения предшествующих платежей. Эти данные образуют временные ряды, которые могут рассматриваться как траектории случайных процессов.

Классическая финансовая экономика. Дефлятор

В текущий момент времени полезность от платежа $C(t)$ зависит от его величины и отдаленности момента платежа t. Основополагающая парадигма теории финансового рынка определяет полезность платежа как функцию, убывающую по t. Более поздние платежи имеют меньшую полезность, чем равные по величине, но более ранние платежи. Смысл этой парадигмы очевиден и подробно изучается в стандартных экономических курсах. Для изучения количественных соотношений требуется ввести величину, численно определяющую эту меру удешевления отдаленных платежей, рассматриваемых в данный момент времени. Такая величина называется дефлятором.

Формально дефлятор может быть определен как бездивидендная ценная бумага, имеющая положительную цену в любой момент времени. При соответствующей нормировке можно считать текущую цену дефлятора, равной единице. Условие нормировки можно представить следующим уравнением

$$u[t_2, B(t_1, t_2)] = u(t_1, 1)\ , \qquad (1.1)$$

где $B(t_1,\ t_2)$ — цена дефлятора в момент времени t_2. Если в данный момент рассматривается будущий платеж, то при расчетах его следует поделить на цену дефлятора. Таким образом, если в момент времени $t = 0$ оценивается поток платежей $\{C(t_2)\}$, его текущую цену следует считать равной величине

$$C(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C(t_i)}{B(0, t_i)}\,. \qquad (1.2)$$

Величина $C(0)$ называется приведенной стоимостью PV (present value) потока платежей.

Здесь, однако, важно учитывать, что дефлятор, вообще говоря, меняется во времени, причем эти изменения зависят от состояния и настроения рынка, которые невозможно однозначно определить и предсказать. Это означает, что дефлятор следует считать случайным процессом и моделировать его как случайный процесс.

Как правило, дефлятор моделируется как случайный процесс, кусочно постоянный по времени. А именно: пусть $[0,T]$ — рассматриваемый отрезок времени. Предполагается, что можно определить такую последовательность моментов времени $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$, что на интервалах (t_i, t_{i+1}) дефлятор является неслучайной величиной.

Риски финансовых инструментов

Так как платежи являются, вообще говоря, случайными величинами, любая инвестиция сопряжена с риском. Меру риска финансисты связывают с волатильностью финансового инструмента. Обычно выделяются следующие виды рисков.

Собственный риск финансового инструмента определяется тем, что платежи по нему представляют собой случайные величины с распределением, определенным на достаточно широком интервале. В первую очередь инструменты с собственным риском это акции и активы, производные по ним.

Дефолтный риск характеризуется тем, что платежи по инструменту объявляются определенными, однако со значимой вероятностью они могут не состояться. Таковыми инструментами являются, например, облигации компаний, возможностью банкротства которых нельзя пренебречь. Платежи в этом случаи представляют собой случайные величины с распределением следующего вида:

Платежи	A	0
Вероятности	$1 - q$	q

Величина q при этом, как правило, мала, но не пренебрежимо мала (например, порядка 0.05—0.10).

Предполагается, что на рынке присутствуют активы, не имеющие ни собственного, ни дефолтного риска. Такие инструменты будем называть *безрисковыми*. Безрисковые финансовые инструменты — это инструменты с определенными платежами, причем вероятность того, что эти платежи по какой-либо причине не состоятся, считается фактически равной нулю.

Безрисковыми инструментами являются в первую очередь государственные облигации стран с устойчивой экономикой. В большинстве случаев эталоном безрисковых инструментов считаются treasures — обязательства казначейства США. Гособлигации стран, обладающих высоким рейтингом ведущих рейтинговых агентств, таких как Moody's, SNP также считаются безрисковыми инструментами. С достаточной точностью безрисковыми инструментами могут считаться облигации корпораций, обладающих высшим рейтингом.

Платежи по безрисковым инструментам представляют собой детерминированные величины. С математической точки зрения безрисковые облигации рассматриваются как детерминированный процесс платежей с заранее известными значениями.

Однако безрисковые инструменты не имеют лишь риска, связанного с самим эмитентом. На рынке всегда присутствует еще один вид риска, который называется *процентным* риском или $C3$-риском. Его причина в том, что случайной величиной является дефлятор. Это значит, что даже для абсолютно гарантированного будущего платежа его полезность может быть случайной величиной.

Кривая доходности

Пусть в момент времени τ производится погашение безрисковой бескупонной облигации номиналом единица.

В момент времени $t < \tau$ облигация котируется на рынке по цене $P(t,\tau)<1$. Величина

$$r(t,\tau)=\frac{1}{P(t,\tau)}-1 \tag{1.3}$$

есть доходность безрискового актива на временном промежутке $[t, \tau]$.

Пусть погашения безрисковых облигаций осуществляются в моменты времени из промежутка $M = \{t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n\}$. Дискретная модель дефлятора предполагает, что в момент времени t_i ставка $r(t_i, t_{i+1})$ является детерминированной величиной. Дефлятор в такой модели представляется в виде

$$B(t_k)=\prod_{i=1}^{k}[1+r(t_{i-1},t_i)], \tag{1.4}$$

и в момент времени t_k его значение детерминировано. Значение дефлятора детерминировано также и в момент времени t_{k+1}, однако последующие его значения уже не являются детерминированными.

В такой модели величины (1.3) представляют собой прогнозные значения дефлятора (1.4):

$$B^{(f)}(t_k)=\frac{1}{P(0,t_k)}. \tag{1.5}$$

Аналитическая экстраполяция значений (1.5) называется *кривой доходности*. Кривая доходности используется для прогнозирования дефлятора во все будущие моменты времени до горизонта планирования.

Глава 2
МОДЕЛИ ИНСТРУМЕНТОВ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ ПЛАТЕЖАМИ. ОБЛИГАЦИИ

В этом разделе рассматриваются финансовые инструменты с детерминированными платежами. По определению, такие инструменты несут в себе лишь процентный риск для инвестора. Таковыми в первую очередь являются облигации.

Приобретая или выпуская облигацию, инвестор ориентируется на прогнозное значение дефлятора, которое дает кривая доходности. Однако в последующие моменты времени цены безрисковых облигаций могут меняться. Наблюдаемое значение дефлятора будет, вообще говоря, отличаться от его прогнозного значения, и эффект финансовой операции может отличаться от его прогнозной оценки. Проиллюстрируем сказанное примером.

Пример 2.1. Инвестор приобретает облигацию по цене 104.8 у.е., платежи по которой указаны в таблице 2.1 (строка 2).

Таблица 2.1

Данные для примера 2.1

1	Моменты времени	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 5$
2	Платежи (длинная позиция)	10	0	10	0	100
3	Платежи (короткая позиция)	5	5	5	5	100

На момент времени $t = 0$ имеются следующие котировки безрисковых облигаций:

$$P(0,1) = 0.98;\ P(0,2) = 0.94;\ P(0,3) = 0.98;$$
$$P(0,4) = 0.88;\ P(0,5) = 0.86.$$

Вычисляем цену приобретаемого потока платежей:

$$0.98 \cdot 10 + 0.91 \cdot 10 + 0.86 \cdot 100 = 104.9.$$

и эффект:

$$104.9 - 104.8 = +0.1.$$

Аналогично для продаваемого потока. Цена

$$0.98 \cdot 5 + 0.94 \cdot 5 + 0.91 \cdot 5 + 0.88 \cdot 5 + 0.86 \cdot 100 = 104.55;$$

эффект:

$$104.6 - 104.55 = +\,0.05.$$

Общий эффект, таким образом, равен

$$0.1 + 0.05 = 0.15.$$

Прогнозируемый дефлятор:

$$B(0,1) = \frac{1}{P(0,1)} = 1.020408\,;\ B(0,2) = \frac{1}{P(0,2)} = 1.06383\,;$$
$$B(0,3) = \frac{1}{P(0,3)} = 1.098901\,;\ B(0,4) = \frac{1}{P(0,4)} = 1.136364\,;$$
$$B(0,5) = \frac{1}{P(0,5)} = 1.162791\,.$$

Теперь предположим, что в момент времени $t = 1$ котировки безрисковых облигаций имеют следующие значения:

$$P^{(1)}(1,2) = 0.99;\ P^{(1)}(1,3) = 0.95;\ P^{(1)}(1,4) = 0.92;$$
$$P^{(1)}(1,5) = 0.89.$$

В момент времени $t = 2$, соответственно

$$P^{(2)}(2,3) = 0.96;\ P^{(2)}(2,4) = 0.94;\ P^{(2)}(2,5) = 0.91.$$

В момент $t = 3$:

$$P^{(3)}(3,4) = 0.98;\ P^{(3)}(3,5) = 0.96.$$

и, наконец, в момент $t = 4$:

$$P^{(4)}(4,5) = 0.96.$$

Получаем следующие значения наблюдаемого дефлятора:

$$B^*(0,1) = \frac{1}{P(0,1)} = 1.020408\ ;$$

$$B^*(0,2) = \frac{1}{P(0,1)P^{(1)}(1,2)} = 1.030715\ ;$$

$$B^*(0,3) = \frac{1}{P(0,1)P^{(1)}(1,2)P^{(2)}(2,3)} = 1.073662\ ;$$

$$B^*(0,4) = \frac{1}{P(0,1)P^{(1)}(1,2)P^{(2)}(2,3)P^{(3)}(3,4)} = 1.095573\ ;$$

$$B^*(0,5) = \frac{1}{P(0,1)P^{(1)}(1,2)P^{(2)}(2,3)P^{(3)}(3,4)P^{(4)}(4,5)} = 1.129457\ .$$

Значения:

$$P^*(0,1) = \frac{1}{B^*(0,1)} = 0.98\ ;\ P^*(0,2) = \frac{1}{B^*(0,2)} = 0.9702\ ;$$

$$P^*(0,3) = \frac{1}{B^*(0,3)} = 0.931392\ ;\ P^*(0,4) = \frac{1}{B^*(0,4)} = 0.912764\ ;$$

$$P^*(0,5) = \frac{1}{B^*(0,5)} = 0.885381$$

можно интерпретировать как новые (апостериорные) цены безрисковых облигаций.

Теперь эффекты от финансовых операций, соответственно, равны:

$$0.98 \cdot 10 + 0.931392 \cdot 10 + 0.885381 \cdot 100 - 104.8 =$$
$$= 2.852044;$$

$$0.98 \cdot 5 + 0.9702 \cdot 5 - 0.931392 \cdot 5 - 0.912764 \cdot 5 - 0.885381 \cdot 100 + 104.6 = -2.9099.$$

Итоговый эффект изменился и стал отрицательным.

Линеаризация кривой доходности. Постоянная безрисковая ставка

Пусть $t_0 < t_1 < ...< t_n$ — последовательность моментов времени, и $B(t_k)$ — значения дефлятора на промежутках $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, ..., n$. Рассмотрим логарифмическую регрессию B на совокупности промежутков. Методом наименьших квадратов, получаем (с учетом того, что $B(0) = 1$):

$$\ln \hat{B}(t) = rt \tag{2.1}$$

Величина r называется постоянной безрисковой ставкой.

Наиболее простые модели финансовых рынков используют постоянную безрисковую ставку. Используется также постоянная дискретная ставка, определяемая соотношением

$$e^r = 1 + R_f \tag{2.2}$$

Если в момент времени $t = 0$ оценена постоянная безрисковая ставка, то оценка потока платежей $\{C_r\}$ принимает следующий вид:

$$\hat{C}(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+R_f)^t} = \sum_{t=1}^{T} e^{-rt} C_t \tag{2.3}$$

Наиболее простые модели детерминированного потока платежей используют линейную аппроксимацию дефлятора, а вариацию кривой доходностей задают как приращение постоянной безрисковой ставки:

$$r \to r + \Delta r \tag{2.4}$$

Так, в примере 1, осуществляя регрессии (2.1), получаем:

$$\ln B(t) = 1.013372 + 0.028296t$$

$$\ln B^*(t) = 1.024999 + 0.03573t \tag{2.5}$$

Таким образом, линейное приближение моделирует пример 1 как изменение постоянной безрисковой ставки с 2.83% на 3.57%.

Модели иммунизации

Модели иммунизации потока детерминированных платежей — это модели формирования пакета облигаций минимально чувствительного к изменению дефлятора на временном промежутке от момента формирования портфеля до момента полного погашения всех входящих в него облигаций.

Наиболее простые модели используют линеаризацию дефлятора и рассматривают его вариацию в форме (2.4).

Пусть инвестор приобрел облигации с общим потоком платежей A_r и выпустил облигации с общим потоком L_r. Тогда общий приведенная стоимость потока платежей, связанного с этой стратегией, определяется формулой

$$\bar{C}(r,t) = \sum_{t=1}^{n} e^{-rt}(A_t - L_t) \tag{2.6}$$

Условие иммунизации в линейной модели задается уравнением

$$\frac{d\bar{C}(r,t)}{dr} = 0 \tag{2.7}$$

С учетом (2.6) условие (2.7) может записано следующим образом:

$$\sum_{t=1}^{T} te^{-rt} A_t = \sum_{t=1}^{T} te^{-rt} L_t \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) называется условием иммунизации Рэдингтона.

Если одновременно с (2.7) выполняется условие

$$\frac{d^2\overline{C}(r,t)}{dr^2} > 0 ,$$

т.е.

$$\sum_{t=1}^{T} t^2 e^{-rt} A_t > \sum_{t=1}^{T} t^2 e^{-rt} L_t ,$$

то при любых малых изменениях дефлятора портфель облигаций будет приносить положительный доход. Такой портфель называется *арбитражным*.

Следует отметить, что в классической финансовой экономике существование арбитража рассматривается как «патология» (см. [8; 4]).

Возможность арбитража исчезает, если отказаться от линейной модели в пользу более общей. Приведем соответствующее обобщение модели иммунизации.

Пусть

$$P(0,1), P(0,2), ..., P(0,T) \text{ —}$$

исходные котировки безрисковых облигаций, а

$$P^*(0,1), P^*(0,2), ..., P^*(0,T) \text{ —}$$

апостериорные котировки. Тогда

$$\Delta S = \sum_{t=1}^{T} P^*(0,t)N(t) - \sum_{t=1}^{T} P(0,t)N(t) ,$$

эффект от изменения процентных ставок.

Имеем:

$$\Delta S = \sum_{t=1}^{T} P(0,t)\left[\frac{P^*(0,t)}{P(0,t)} - 1\right]N(t) = \sum_{t=1}^{T} n(t)g(t)$$

где

$$\boldsymbol{n(t) = P(0,t)N(t)},\ g(t) = \frac{P^*(0,t)}{P(0,t)} - 1 .$$

Сделаем дополнительное предположение: функция $g(t)$является дифференцируемой и допускает разложение в ряд Тейлора на интервале $(-T,\ T)$. Такое допущение предполагает аналитическую интерполяцию (достаточно гладкую кривую доходности).

Тогда, так как $g(0) = 0$, то с точностью до бесконечно малых порядка выше второго получаем:

$$g(t) = g^{/}(0)t + \frac{1}{2}g^{//}(0)t^2,$$

и, значит,

$$\Delta S = \sum_{t=1}^{T} g^{/}(0)tn(t) + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} g^{//}(\xi)t^2 n(t).$$

Стратегию минимального риска реализует решение следующей оптимизационной задачи:

$$V(A_t, L_t) = \left|\sum_{t=1}^{T} t^2 n(t)\right| \to \min \text{ при условии } \sum_{t=1}^{T} tn(t) = 0.$$

Пример 2.2. Рассматривается набор облигаций, платежи по которым указаны в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Данные для примера 2.2

	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5	t=6	Цены продажи
Платежи по облигации 1		10		10		100	100
Платежи по облигации 2	5		5		5	100	100
Платежи по облигации 3			10		10	200	180
Котировки безрисковых облигаций	0.97	0.94	0.90	0.88	0.85	0.83	

Требуется составить портфель из этих облигаций и выпустить собственную бескупонную облигацию с использованием стратегии минимального риска.

Пусть инвестор приобретает x облигаций 1, y облигаций 2 и z облигаций 3, а L — платеж по выпускаемой облигации. Тогда стратегия минимального риска дает следующую постановку задачи:

минимизировать величину

$|0.97 \cdot 5y \cdot 1 + 0.94 \cdot 10x \cdot 4 + 0.90 \cdot (5y + 10z) \cdot 9 + 0.88 \cdot 10x \cdot 16 + 0.85 \cdot (5y + 10z) \cdot 25 + 0.83 \cdot (100 - L) \cdot 36|$

при выполнении условия

$|0.97 \cdot 5y \cdot 1 + 0.94 \cdot 10x \cdot 2 + 0.90 \cdot (5y + 10z) \cdot 3 + 0.88 \cdot 10x \cdot 4 + 0.85 \cdot (5y + 10z) \cdot 5 + 0.83 \cdot (100 - L) \cdot 6 = 0.$

Приводя коэффициенты при L к единице, приходим к следующей формулировке:

$$\begin{aligned} &|105.97x + 105.07y + 161.62z - L| \to \min; \\ &21.27x + 21.09y + 32.45z - L = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Разумеется, решением задачи (2.9) без каких-либо дополнительных условий служит нулевое решение. Однако в реальных ситуациях стратегия направлена на решение какой-то задачи. Например, если инвестор хочет на начальном этапе получить некоторый избыточный капитал, вместо уравнения в (2.9) может появиться неравенство типа

$$L_* \le 21.27x + 21.09y + 32.45z \le L^*.$$

Внутренняя ставка доходности

Рассмотренные до сих пор модели имеют существенно ограниченный характер, так как в них вообще не учитывалась продажная цена (котировка) облигации. Точнее, использовались котировки безрисковых облигаций для получения прогнозных значений дефлятора. В качестве параметра оценки процентной ставки рассматривался угловой коэффициент γ линеаризованной кривой доходности.

Заметим, что при этом оценка потока платежей, вообще говоря, не совпадает с котировкой (даже для безрисковых облигаций из-за приближений линеаризации).

Внутренней ставкой доходности потока платежей $\{C(t)\}$с продажной ценой C называется величина, удовлетворяющая равенству $C(y) = C$.

В зависимости от рассматриваемого способа дисконтирования можно рассматривать ставку Y, удовлетворяющую уравнению

$$C = \sum_{t=1}^{T} \frac{C(t)}{(1+Y)^t}, \tag{2.10}$$

или ставку y, удовлетворяющую уравнению

$$C = \sum_{t=1}^{T} e^{-yt} C(t). \tag{2.11}$$

Эти ставки связаны соотношением $e^y = 1 + Y$, и при малых их значениях практически совпадают.

Величина Y называется *доходностью к погашению*, а y — *силой* процента.

В отличие от постоянной безрисковой ставки внутренняя ставка доходности для каждой облигации своя. При этом она зависит как от внешних условий (от прогнозных значений дефлятора), так и от внутренних (например, от степени доверия к эмитенту облигации).

Примечание. Внутренняя ставка доходности учитывает дефолтный риск. Чем ниже степень доверия к эмитенту, тем выше окажется его ставка. Облигации корпораций с более высокой вероятностью дефолта по обязательствам котируются с более высокой внутренней ставкой (как говорят участники рынка — с более высокой доходностью).

Для нахождения внутренней ставки в конкретном случае требуется просто решить уравнение (2.10) или (2.11). Так, для облигаций из примера 2.2 имеем: