

ЕДИННЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН



Л.И. СЛОНИМСКИЙ, И.С. СЛОНИМСКАЯ

МАТЕМАТИКА

СБОРНИК ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ЗАДАНИЙ С РЕШЕНИЯМИ И ОТВЕТАМИ

для подготовки
к ЕДИНОВОМУ
ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ



ПРОФИЛЬНЫЙ
УРОВЕНЬ

ЕГЭ – ШКОЛЬНИКАМ
И УЧИТЕЛЯМ

100
БАЛЛОВ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
С48

Слонимский, Лев Иосифович.

С48 Математика : сборник экзаменационных заданий с решениями и ответами для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / Л. И. Слонимский, И. С. Слонимская. — Москва: Издательство АСТ, 2021. — 316, [4] с.: ил. — (Сборник экзаменационных заданий для подготовки к ЕГЭ).

ISBN 978-5-17-139258-1

Вниманию выпускников 11-х классов предлагается сборник, который содержит типовые задания с подробными разборами и ответами для подготовки к ЕГЭ профильного уровня.

Задания в сборнике сгруппированы по темам, соответствующим официальному кодификатору. По каждой теме предлагается решить различные типы задач. Даны подробные разборы решения типовых примеров и несколько заданий для самостоятельной работы. В конце пособия помещены ответы.

Предлагаемый материал позволит учителям организовать успешную подготовку к итоговой аттестации, а учащимся — самостоятельно проверить свои знания и готовность к выполнению экзаменационной работы по математике в формате ЕГЭ профильного уровня.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-17-139258-1

© Слонимский Л. И., Слонимская И. С., 2021
© ООО «Издательство АСТ», 2021

Содержание

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа и вычисления	7
1.1.1. Арифметические действия и их свойства	7
1.1.2. Округление чисел и проценты	10
1.1.3. Степени, корни и их свойства	19
1.1.4. Логарифмы и их свойства	23
1.2. Преобразование выражений с переменными	25
1.3. Основы тригонометрии	30
1.3.1. Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного угла	30
1.3.2. Основные тригонометрические тождества	33
1.3.3. Формулы приведения	35
1.3.4. Синус и косинус двойного угла	36
1.4. Уравнения и системы уравнений	40
1.4.1. Рациональные уравнения	40
1.4.2. Иррациональные уравнения	47
1.4.3. Показательные уравнения	50
1.4.4. Логарифмические уравнения	51
1.4.5. Тригонометрические уравнения	54
1.4.6. Общие принципы решения уравнений с одинаковыми компонентами действий	61
1.4.7. Уравнения с параметрами	64
1.5. Неравенства и системы неравенств	66
1.5.1. Рациональные неравенства и метод интервалов	66
1.5.2. Показательные неравенства	70
1.5.3. Логарифмические неравенства	73
1.6. Текстовые задачи и методы их решения	78
1.6.1. Решение текстовых задач арифметическим методом ..	78
1.6.2. Решение текстовых задач алгебраическим методом ..	83
1.6.3. Решение текстовых задач графическим методом ...	106
1.7. Прогрессии	109
1.8. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений	112
1.9. Решение уравнений и задач в целых числах	128

2. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2.1. Производная	132
2.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл	132
2.1.2. Физический смысл производной	140
2.1.3. Уравнение касательной к графику функции	142
2.2. Исследование функций с помощью производной	147
2.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков	147
2.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических задачах	173
2.3. Первообразная	176

3. ГЕОМЕТРИЯ (ПЛАНИМЕТРИЯ)

3.1. Треугольник	185
3.1.1. Треугольник. Высота, биссектриса, медиана.	185
3.1.2. Равнобедренный треугольник. Равносторонний треугольник	187
3.1.3. Прямоугольный треугольник. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника	190
3.1.4. Сумма углов треугольника. Внешние углы треугольника	192
3.2. Многоугольники	194
3.2.1. Параллелограмм	194
3.2.2. Прямоугольник, ромб и квадрат	196
3.2.3. Трапеция	198
3.2.4. Правильные многоугольники	201
3.3. Окружность и круг	203
3.3.1. Вписанный и центральный углы	203
3.3.2. Касательная и секущая к окружности	206
3.3.3. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника	209
3.3.4. Вписанные и описанные четырёхугольники	213
3.4. Измерение геометрических величин	218
3.4.1. Площадь квадрата, прямоугольника	218
3.4.2. Площадь параллелограмма и ромба, выпуклого четырёхугольника	221

3.4.3. Площадь треугольника	225
3.4.4. Площадь трапеции	227
3.4.5. Площадь круга, площадь сектора	229
3.4.6. Формула Пика для нахождения площади многоугольников на клетчатой бумаге	232

4. ГЕОМЕТРИЯ (СТЕРЕОМЕТРИЯ)

4.1. Многогранники	237
4.1.1. Элементы многогранников	237
4.1.2. Призма, параллелепипед, куб	243
4.1.3. Пирамида	247
4.2. Тела вращения	250
4.2.1. Цилиндр	250
4.2.2. Конус	251
4.2.3. Шар и сфера	253
4.2.4. Вписанные и описанные многогранники	255
4.3. Измерение геометрических величин в пространстве	257
4.3.1. Угол между прямыми в пространстве, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями	257
4.3.2. Площадь поверхности многогранника	259
4.3.3. Объёмы	263
4.4. Использование метода координат в пространстве при решении задач	269

5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКИ

5.1. Табличное и графическое представление данных	275
5.2. Вероятности событий. Классическое определение вероятности	291
5.3 Теоремы о вероятности событий	293

6. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

6.1. Банковские задачи	299
----------------------------------	-----

ОТВЕТЫ	306
-------------------------	------------

Предисловие

Здравствуйте, уважаемые читатели!

Для кого написана эта книга? Конечно, в первую очередь, для учащихся. Данный сборник задач может представлять интерес и для уважаемых коллег-учителей, с которыми мы делимся своим опытом решения задач ЕГЭ по профильной математике. Ну и, конечно, родителям учащихся. Надеемся, что всем вам это пособие будет полезно.

Экзамен ЕГЭ по профильной математике на сегодняшний день представляет собой серьезное мероприятие, общая продолжительность которого составляет 3 часа 55 минут. Учащимся предлагается решить 19 задач. В первых 12-ти проверяется только ответ, который заносится в специальный бланк, а в оставшихся 7 задачах (с 13-й по 19-ю) полное решение проверят специально подготовленные эксперты. Формат записи ответа в бланк первых 12 заданий в виде целого числа или конечной десятичной дроби позволяет нам упростить решение многих задач. Мы так же покажем, как можно использовать эту специфику ЕГЭ по математике для быстрого выполнения некоторых заданий с обязательным строгим математическим подходом.

Задания в сборнике сгруппированы по темам и типам.

В связи с возможными изменениями в формате и количестве заданий рекомендуем в процессе подготовки к экзамену обращаться к материалам сайта официального разработчика экзаменационных заданий — Федерального института педагогических измерений: www.fipi.ru

Желаем нашим юным читателям успешной сдачи ЕГЭ по математике.

Авторы

1. АЛГЕБРА

1.1. Числа и вычисления

1.1.1. Арифметические действия и их свойства

Проверка результатов арифметических действий с помощью остатков от деления на 9

Действия

- Остаток любого числа от деления на 9 можно получить, складывая цифры числа, при этом в полученной сумме нужно продолжить сложение цифр до получения однозначного остатка. При сложении цифр суммы и отдельные числа, кратные 9, а также нуль можно игнорировать, они не влияют на конечный результат.
- Умножаем или складываем остатки множителей или слагаемых и сравниваем их с остатком суммы или произведения. При верном решении они должны совпадать.
- При делении и вычитании проверку этим способом можно производить, умножая остаток частного на остаток делителя, соответственно, складывая остаток разности с остатком вычитаемого.

Примеры

<p>1. $44 \cdot 46 = 2024.$ $4 + 4 = 8;$ $4 + 6 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1;$ $2 + 0 + 2 + 4 = 8;$ $8 \cdot 1 = 8$ (верно)</p>	<p>3. $156 : 12 = 13 \rightarrow 13 \cdot 12 = 156.$ $1 + 3 = 4;$ $1 + 2 = 3;$ $1 + 5 + 6 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$ $4 \cdot 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$ (верно)</p>
<p>2. $327 + 48 = 375.$ $3 + 2 + 7 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$ $4 + 8 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3;$ $3 + 7 + 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6;$ $3 + 3 = 6$ (верно)</p>	<p>4. $58 - 22 = 36 \rightarrow 36 + 22 = 58.$ $3 + 6 = 9; 2 + 2 = 4;$ $5 + 8 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4;$ $9 + 4 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$ (верно)</p>

Приёмы быстрого устного счёта	
Умножение чисел от 101 до 109 между собой $(100 + a)(100 + b) = 10\,000 + 100(a + b) + ab$	
Порядок действий	Примеры
1. Записываем число 1. 2. Справа записываем сумму чисел из разряда единиц у множителей. 3. Ещё правее записываем произведение этих же чисел.	1. $102 \cdot 104 = 10\,000 + 100(2 + 4) + 2 \cdot 4 = 10\,000 + 600 + 8 = 10\,608.$ 2. $109 \cdot 108 = 10\,000 + 100(9 + 8) + 9 \cdot 8 = 10\,000 + 1700 + 72 = 11\,772.$
Умножение чисел больше 10 $(10 + a)(10 + b) = 10(10 + a + b) + ab$	
Порядок действий	Примеры
1. К одному из множителей прибавляем единицы второго множителя, получаем десятки. 2. Перемножаем единицы. 3. Складываем десятки с произведением единиц.	1. $12 \cdot 19 = 10(10 + 2 + 9) + 2 \cdot 9 = 210 + 18 = 228.$ 2. $16 \cdot 13 = 10(10 + 6 + 3) + 6 \cdot 3 = 190 + 18 = 208.$
Умножение чисел с одинаковыми десятками и числом единиц, дающих в сумме 10 $(1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10)$	
<ul style="list-style-type: none"> • Десятки умножаем на следующее натуральное число: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $5 \cdot 6$; $9 \cdot 10$; $11 \cdot 12$. • Единицы просто перемножаем (если в произведении получилось однозначное число, то слева приписываем 0): $1 \cdot 9 = 09$; $2 \cdot 8 = 16$; $3 \cdot 7 = 21$; $4 \cdot 6 = 24$; $5 \cdot 5 = 25$. • В результате: слева — произведение десятков, справа — произведение единиц. <p><i>Примеры:</i></p> 1. $42 \cdot 48 = (4 \cdot 5) \cdot 100 + (2 \cdot 8) = 2000 + 16 = \underline{2016}$; 2. $51 \cdot 59 = (5 \cdot 6) \cdot 100 + (1 \cdot 9) = 3000 + 9 = \underline{3009}$; 3. $83 \cdot 87 = (8 \cdot 9) \cdot 100 + (3 \cdot 7) = 7200 + 21 = \underline{7221}$; 4. $115^2 = 115 \cdot 115 = (11 \cdot 12) \cdot 100 + (5 \cdot 5) = 13200 + 25 = \underline{13225}.$	

Пример 1

Найдите значения выражения $\left(\frac{1}{7} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 1,4$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{7} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 1,4 = -2,95.$$

$$1) \frac{1}{7} - 2\frac{1}{4} = -\left(2\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) = -\left(2\frac{7}{28} - \frac{4}{28}\right) = -2\frac{3}{28};$$

$$2) -2\frac{3}{28} \cdot 1,4 = -\frac{59 \cdot 14}{28 \cdot 10} = -\frac{59}{2 \cdot 10} = -\frac{29,5}{10} = -2,95.$$

Ответ: $-2,95$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите значения выражения $\left(-\frac{1}{8} + 8\frac{1}{2}\right) \cdot 1,28$.

2. Найдите значения выражения $\left(-3\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6}\right) \cdot 1,2$.

3. Найдите значения выражения $\left(1\frac{2}{3} - 1\frac{3}{5}\right) \cdot 24$.

4. Найдите значения выражения $\left(-1\frac{3}{8} + \frac{2}{7}\right) \cdot 0,56$.

5. Найдите значения выражения $\left(\frac{2}{7} - 1\frac{2}{3}\right) \cdot 16,8$.

Пример 2

Найдите значение выражения $(481^2 - 69^2) : 550$.

Решение.

$$(481^2 - 69^2) : 550 = (481 - 69)(481 + 69) : 550 = \frac{412 \cdot 550}{550} = 412.$$

Ответ: 412 .

Задачи для самостоятельного решения

6. Найдите значение выражения $(202^2 - 53^2) : 255$.

7. Найдите значение выражения $(94^2 - 14^2) : 108$.

8. Найдите значение выражения $(601^2 - 17^2) : 618$.

9. Найдите значение выражения $(970^2 - 72^2) : 1042$.

10. Найдите значение выражения $(314^2 - 26^2) : 340$.

Пример 3

Найдите значение выражения $\frac{30,9 \cdot 0,356}{3,09 \cdot 35,6}$.

Решение.

$$\frac{30,9 \cdot 0,356}{3,09 \cdot 35,6} = \frac{30,9 \cdot 0,356 \cdot 10\,000}{3,09 \cdot 35,6 \cdot 10\,000} = \frac{309 \cdot 356}{309 \cdot 356 \cdot 10} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

Задачи для самостоятельного решения

11. Найдите значение выражения $\frac{1,19 \cdot 27,1}{11,9 \cdot 0,271}$.
12. Найдите значение выражения $\frac{2,12 \cdot 28,1}{21,2 \cdot 0,281}$.
13. Найдите значение выражения $\frac{13,6 \cdot 4,96}{1,36 \cdot 49,6}$.
14. Найдите значение выражения $\frac{0,461 \cdot 49,9}{46,1 \cdot 0,499}$.
15. Найдите значение выражения $\frac{12,4 \cdot 0,388}{0,124 \cdot 3,88}$.

1.1.2. Округление чисел и проценты

Признаки делимости	
на 2	Число оканчивается на чётную цифру (0, 2, 4, 6, 8).
на 3	Сумма цифр делится на 3.
на 4	Две последние цифры числа — или нули, или число, делящееся на 4.
на 5	Последняя цифра числа — 0 или 5.
на 6	Одновременное выполнение признаков делимости на 2 и на 3.
на 7	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 2. Если получилось число, большее числа из оставшихся цифр, то следует вычесть из удвоенной последней цифры это число. Если число из оставшихся цифр больше, то надо из него вычесть удвоенную последнюю цифру.
на 8	Три последние цифры числа — нули или образуют число, делящееся на 8.

Признаки делимости	
на 9	Сумма цифр числа делится на 9.
на 10	Последняя цифра числа — 0.
на 11	Разность между суммой цифр, стоящих на нечётных местах, и суммой цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11.
на 13	Отбросить последнюю цифру, умножить её на 4 и прибавить к числу из оставшихся цифр.
на 25	Две последние цифры — нули или число, делящееся на 25.

Пример 4

В магазине покупатель отдал кассиру 1000 руб. за 21 шоколадку по цене 31 руб. 90 коп. за штуку. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

Решение.

1) $31,9 \cdot 21 = 669,9$ (руб.) — стоимость 21 шоколадки;

2) $1000 - 669,9 = 330,1$ (руб.) — сдача с 1000 рублей.

Ответ: 330,1.

Задачи для самостоятельного решения

16. В магазине покупатель отдал кассиру 1000 руб. за 34 шоколадки по цене 24 руб. 50 коп. за штуку. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

17. В магазине покупатель отдал кассиру 1000 руб. за 32 шоколадки по цене 29 руб. 90 коп. за штуку. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

18. В магазине покупатель отдал кассиру 1000 руб. за 33 шоколадки по цене 26 руб. 20 коп. за штуку. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

19. В магазине покупатель отдал кассиру 1000 руб. за 26 шоколадок по цене 27 руб. 80 коп. за штуку. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

20. В магазине покупатель отдал кассиру 1000 руб. за 25 шоколадок по цене 33 руб. 10 коп. за штуку. Сколько рублей сдачи он должен получить у кассира?

Пример 5

В квартире, где проживает Денис, установлен прибор учёта расхода горячей воды (водосчётчик). 1 июля счётчик показывал расход 104 м^3 воды, а 1 августа 110 м^3 . Какую сумму должен заплатить Денис за горячую воду за июль, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 198 руб. 19 коп.? Ответ дайте в рублях.

Решение.

1) $110 - 104 = 6 \text{ (м}^3\text{)}$ — расход горячей воды за июль месяц;

2) $6 \cdot 198,19 = 1189,14 \text{ (руб.)}$.

Ответ: 1189,14.

Задачи для самостоятельного решения

21. В квартире, где проживает Сергей, установлен прибор учёта расхода горячей воды (водосчётчик). 1 июля счётчик показывал расход 188 м^3 воды, а 1 августа 202 м^3 . Какую сумму должен заплатить Денис за горячую воду за июль, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 198 руб. 19 коп.? Ответ дайте в рублях.

22. В квартире, где проживает Полина, установлен прибор учёта расхода горячей воды (водосчётчик). 1 января счётчик показывал расход 107 м^3 воды, а 1 февраля 123 м^3 . Какую сумму должна заплатить Полина за горячую воду за январь, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 188 руб. 53 коп.? Ответ дайте в рублях.

23. В квартире, где проживает Александр, установлен прибор учёта расхода горячей воды (водосчётчик). 1 июля счётчик показывал расход 104 м^3 воды, а 1 августа 110 м^3 . Какую сумму должен заплатить Александр за горячую воду за июль, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 198 руб. 19 коп.? Ответ дайте в рублях.

24. В квартире, где проживает Алексей, установлен прибор учёта расхода горячей воды (водосчётчик). 1 марта счётчик показывал расход 183 м^3 воды, а 1 апреля 193 м^3 . Какую сумму должен заплатить Алексей за горячую воду за июль, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 188 руб. 53 коп.? Ответ дайте в рублях.

25. В квартире, где проживает Даниил, установлен прибор учёта расхода горячей воды (водосчётчик). 1 апреля счётчик показывал расход 118 м^3 воды, а 1 марта 132 м^3 . Какую сумму должен заплатить Даниил за горячую воду за июль, если цена 1 м^3 горячей воды составляет 213 руб. 17 коп.? Ответ дайте в рублях.

Пример 6

По тарифному плану «Просто для всех» компания сотовой связи снимает со счёта абонента 21 руб. каждый вечер. Если на счёте

осталось меньше 21 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. В понедельник утром у Полины на счету было 600 руб. Сколько дней, включая понедельник, она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

Решение.

$$600 : 21 = \frac{600}{21} = \frac{200}{7} = 28\frac{4}{7} = 28 \text{ (ост. 4)}.$$

Остаток 4 рубля не хватит для оплаты 29-го дня.

Ответ: 28.

Задачи для самостоятельного решения

26. По тарифному плану «Просто для всех» компания сотовой связи снимает со счёта абонента 12 руб. каждый вечер. Если на счёте осталось меньше 12 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. В понедельник утром у Полины на счету было 400 руб. Сколько дней, включая понедельник, она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

27. По тарифному плану «Просто для всех» компания сотовой связи снимает со счёта абонента 22 руб. каждый вечер. Если на счёте осталось меньше 22 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. В понедельник утром у Полины на счету было 500 руб. Сколько дней, включая понедельник, она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

28. По тарифному плану «Просто для всех» компания сотовой связи снимает со счёта абонента 15 руб. каждый вечер. Если на счёте осталось меньше 15 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. В понедельник утром у Полины на счету было 700 руб. Сколько дней, включая понедельник, она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

29. По тарифному плану «Просто для всех» компания сотовой связи снимает со счёта абонента 16 руб. каждый вечер. Если на счёте осталось меньше 16 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. В понедельник утром у Полины на счету было 450 руб. Сколько дней, включая понедельник, она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

30. По тарифному плану «Просто для всех» компания сотовой связи снимает со счёта абонента 19 руб. каждый вечер. Если на счёте осталось меньше 19 руб., то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. В понедельник утром у Полины на счету было 800 руб. Сколько дней, включая понедельник, она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

Пример 7

Врач, прописал больному лекарство, которое нужно пить по 0,25 г 3 раза в день в течение 10 дней. В одной упаковке 7 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Решение.

1 таблетка 0,25 г, значит нужно пить по 3 таблетки в день в течение 10 дней.

1) $3 \cdot 10 = 30$ (шт) — общее количество таблеток на курс;

2) $30 : 7 = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ (упак.).

Следовательно, нужно 5 упаковок.

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения

31. Врач, прописал больному лекарство, которое нужно пить по 0,25 г 3 раза в день в течение 18 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

32. Врач, прописал больному лекарство, которое нужно пить по 0,25 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 40 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

33. Врач, прописал больному лекарство, которое нужно пить по 0,25 г 3 раза в день в течение 14 дней. В одной упаковке 20 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

34. Врач, прописал больному лекарство, которое нужно пить по 0,25 г 3 раза в день в течение 14 дней. В одной упаковке 8 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

35. Врач, прописал больному лекарство, которое нужно пить по 0,25 г 3 раза в день в течение 21 дня. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

Пример 8

Учебник стоил 150 рублей. Его цена повысилась на 30 %. Школе для закупки этих учебников выделено 5000 рублей. Какое максимальное число учебников может закупить школа?

Решение.

Цена учебника после повышения на 30 % равна: $150 \cdot 1,3 = 195$ руб.
Поскольку $5000 = 195 \cdot 25 + 125$, то максимальное число учебников, которое может закупить школа, равно 25.

Ответ: 25.

Задачи для самостоятельного решения

36. Учебник стоил 750 рублей. Его цена повысилась на 20 %. Школе для закупки этих учебников выделено 9000 рублей. Какое максимальное число учебников может закупить школа?

37. Учебник стоил 230 рублей. Его цена повысилась на 15 %. Школе для закупки этих учебников выделено 5000 рублей. Какое максимальное число учебников может закупить школа?

38. Учебник стоил 300 рублей. Его цена повысилась на 27 %. Школе для закупки этих учебников выделено 7000 рублей. Какое максимальное число учебников может закупить школа?

39. Учебник стоил 420 рублей. Его цена повысилась на 20 %. Школе для закупки этих учебников выделено 6000 рублей. Какое максимальное число учебников может закупить школа?

40. Учебник стоил 580 рублей. Его цена повысилась на 30 %. Школе для закупки этих учебников выделено 8000 рублей. Какое максимальное число учебников может закупить школа?

Пример 9

Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 8 % активного вещества. Ребёнку в возрасте 6 месяцев врач прописывает 1,28 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 4 месяцев и весом 5 кг в течение суток?

Решение. $8 \% = 0,08$.

1) $20 \cdot 0,08 = 1,6$ (мг) активного вещества в 1 таблетке;

2) $1,28 \cdot 5 = 6,4$ (мг) — на вес ребёнка 5 кг;

3) $6,4 : 1,6 = 4$ (табл.) — количество таблеток в сутки.

Ответ: 4.

Задачи для самостоятельного решения

41. Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 5 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,25 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 4 месяцев и весом 6 кг в течение суток?

42. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 18 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 0,9 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 4 месяцев и весом 8 кг в течение суток?

43. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 13 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,3 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 4 месяцев и весом 6 кг в течение суток?

44. Одна таблетка лекарства весит 40 мг и содержит 5 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 4 месяцев и весом 6 кг в течение суток?

45. Одна таблетка лекарства весит 110 мг и содержит 6 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте 4 месяцев и весом 5 кг в течение суток?

Пример 10

Банк выдал клиенту кредит в сумме 47 000 руб. на год под 20 % годовых. Клиент должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

Решение.

$$r \% = 20 \% = 0,2 = p; k = 1 + 0,2 = 1,2;$$

$$\frac{47\,000 \cdot 1,2}{12} = 4700 \text{ (руб.)}.$$

Ответ: 4700.

Задачи для самостоятельного решения

46. Банк выдал клиенту кредит в сумме 36 000 руб. на год под 13 % годовых. Клиент должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

47. Банк выдал клиенту кредит в сумме 60 000 руб. на год под 9 % годовых. Клиент должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

наковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

48. Банк выдал клиенту кредит в сумме 24 000 руб. на год под 17 % годовых. Клиент должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

49. Банк выдал клиенту кредит в сумме 36 000 руб. на год под 10 % годовых. Клиент должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

50. Банк выдал клиенту кредит в сумме 72 000 руб. на год под 20 % годовых. Клиент должен погашать кредит, внося ежемесячно одинаковую сумму денег, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько денег клиент должен выплачивать в банк ежемесячно?

Пример 11

Четыре одинаковых карандаша дешевле ручки на 10 %. На сколько процентов шесть таких же карандашей дороже ручки?

Решение.

1) $100\% - 10\% = 90\%$ — 90 % стоимости ручки составляет стоимость 4 карандашей;

2) $90\% : 4 = \frac{90}{4} = \frac{45}{2}\%$ — столько процентов составляет стоимость

1 карандаша от стоимости ручки;

3) $\frac{45}{2}\% \cdot 6 = 135\%$ — стоимости ручки составляет стоимость 6 карандашей;

4) $135\% - 100\% = 35\%$ — на столько 6 карандашей дороже ручки.

Ответ: 35.

Задачи для самостоятельного решения

51. Семь одинаковых карандашей дешевле ручки на 2 %. На сколько процентов десять таких же карандашей дороже ручки?

52. Девять одинаковых карандашей дешевле ручки на 7 %. На сколько процентов двенадцать таких же карандашей дороже ручки?

53. Восемь одинаковых карандашей дешевле ручки на 10 %. На сколько процентов двенадцать таких же карандашей дороже ручки?

54. Пять одинаковых карандашей дешевле ручки на 5 %. На сколько процентов семь таких же карандашей дороже ручки?

55. Семь одинаковых карандашей дешевле ручки на 9 %. На сколько процентов одиннадцать таких же карандашей дороже ручки?

Пример 12

В процессе сушки абрикосов получается курага. Курага содержит 10 % воды, а абрикосы — 85 % воды. Сколько килограммов абрикосов потребуется для получения 18 килограммов кураги?

Решение.

Найдём процент сухого остатка в абрикосах и кураге (по массе этот сухой остаток не меняется после сушки).

$$100 \% - 10 \% = 90 \%;$$

$$100 \% - 85 \% = 15 \%.$$

Процентное содержание сухого остатка в абрикосах и кураге обратно пропорционально массе абрикосов и кураги. Составим пропорцию:

абрикосы 15 % с. о. — x кг

курага 90% с. о. — 18 кг

$$\frac{15}{90} = \frac{18}{x};$$

$$x = \frac{90 \cdot 18}{15}; x = 108 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 108.

Задачи для самостоятельного решения

56. В процессе сушки абрикосов получается курага. Курага содержит 10 % воды, а абрикосы — 85 % воды. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 24 килограммов изюма?

57. В процессе сушки абрикосов получается курага. Курага содержит 10 % воды, а абрикосы — 85 % воды. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 94 килограммов изюма?

58. В процессе сушки абрикосов получается курага. Курага содержит 10 % воды, а абрикосы — 85 % воды. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 14 килограммов изюма?

59. В процессе сушки абрикосов получается курага. Курага содержит 10 % воды, а абрикосы — 85 % воды. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 36 килограммов изюма?

60. В процессе сушки абрикосов получается курага. Курага содержит 10 % воды, а абрикосы — 85 % воды. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 52 килограммов изюма?

Пример 13

Владимир Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 53 мили в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

Решение. $53 \cdot 1609 = 85\,277$ (м/ч) = $85,277$ (км/ч) ≈ 85 (км/ч).

Ответ: 85.

Задачи для самостоятельного решения

61. Владимир Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 30 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

62. Владимир Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 25 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

63. Владимир Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 22 мили в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

64. Владимир Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 65 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

65. Владимир Ильич купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Считайте, что 1 миля равна 1609 м. Ответ округлите до целого числа.

1.1.3. Степени, корни и их свойства

Пример 14

Вычислите $4^{0,16} \cdot 16^{0,42}$.

Решение. $4^{0,16} \cdot 16^{0,42} = 4^{0,16} \cdot 4^{2 \cdot 0,42} = 4^{0,16 + 0,84} = 4^1 = 4$.

Ответ: 4.

Задачи для самостоятельного решения

66. Вычислите $5^{0,38} \cdot 25^{0,31}$.

67. Вычислите $8^{0,15} \cdot 32^{0,11}$.

68. Вычислите $3^{0,33} \cdot 27^{0,89}$.

70. Вычислите $8^{0,96} \cdot 16^{0,28}$.

69. Вычислите $2^{0,86} \cdot 4^{0,57}$.

Пример 15

Вычислите $\frac{4^{2,5}}{16^{2,25}}$.

Решение.

$$\frac{4^{2,5}}{16^{2,25}} = \frac{4^{2,5}}{(4^2)^{2,25}} = \frac{4^{2,5}}{4^{2 \cdot 2,25}} = \frac{4^{2,5}}{4^{4,5}} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625.$$

Ответ: 0,0625.**Задачи для самостоятельного решения**

71. Вычислите $\frac{5^{5,6}}{25^{2,3}}$.

74. Вычислите $\frac{4^{3,1}}{8^{1,4}}$.

72. Вычислите $\frac{7^{6,2}}{49^{2,1}}$.

75. Вычислите $\frac{8^{5,8}}{16^{4,1}}$.

73. Вычислите $\frac{8^{4,5}}{64^{1,25}}$.

Пример 16

Вычислите $\frac{18(a^{12})^4 + 9(a^8)^6}{(3a^{16})^3}$.

Решение.

$$\frac{18(a^{12})^4 + 9(a^8)^6}{(3a^{16})^3} = \frac{18a^{48} + 9a^{48}}{27a^{48}} = \frac{27a^{48}}{27a^{48}} = 1.$$

Ответ: 1.**Секреты ЕГЭ**

Так как в условии про значение переменной a ничего не говорится, то при решении можно её не учитывать, т. е. $\frac{18 + 9}{3^3} = \frac{27}{27} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

76. Вычислите $\frac{19(a^5)^6 + 6(a^3)^{10}}{(5a^{15})^2}$.

78. Вычислите $\frac{7(a^6)^5 + 11(a^{10})^3}{(3a^{15})^2}$.

77. Вычислите $\frac{11(a^3)^4 + 7(a^4)^3}{(3a^6)^2}$.

79. Вычислите $\frac{13(a^3)^4 + 5(a^4)^3}{(2a^6)^2}$.

80. Вычислите $\frac{5(a^{12})^5 + 13(a^{10})^6}{(3a^{30})^2}$.

Пример 17

Вычислите $\frac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 81}{162}} = \sqrt[4]{\frac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$$

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

81. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{243} \cdot \sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{9}}$.

84. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{15} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{6}}$.

82. Вычислите $\frac{\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{54}}{\sqrt[5]{6}}$.

85. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{21} \cdot \sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{14}}$.

83. Вычислите $\frac{\sqrt[5]{33} \cdot \sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{11}}$.

Пример 18

Вычислите $16^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$.

Решение. $16^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot 4} \cdot 2^{\frac{2}{3} \cdot 3} = 2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$.

Ответ: 32.

Задачи для самостоятельного решения

86. Вычислите $81^{\frac{5}{14}} \cdot 9^{\frac{2}{7}}$.

87. Вычислите $4^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{4}{5}}$.

88. Вычислите $64^{\frac{3}{8}} \cdot 8^{\frac{1}{4}}$.

89. Вычислите $25^{\frac{5}{12}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}$.

90. Вычислите $49^{\frac{3}{16}} \cdot 7^{\frac{5}{8}}$.

Пример 19

Вычислите $(\sqrt{17} - \sqrt{8})(\sqrt{17} + \sqrt{8})$.

Решение.

$$(\sqrt{17} - \sqrt{8})(\sqrt{17} + \sqrt{8}) = (\sqrt{17})^2 - (\sqrt{8})^2 = 17 - 8 = 9.$$

Ответ: 9.

Задачи для самостоятельного решения

91. Вычислите $(\sqrt{14} - \sqrt{2})(\sqrt{14} + \sqrt{2})$.
92. Вычислите $(\sqrt{23} - \sqrt{8})(\sqrt{23} + \sqrt{8})$.
93. Вычислите $(\sqrt{5} - \sqrt{18})(\sqrt{5} + \sqrt{18})$.
94. Вычислите $(\sqrt{64} - \sqrt{23})(\sqrt{64} + \sqrt{23})$.
95. Вычислите $(\sqrt{48} - \sqrt{15})(\sqrt{48} + \sqrt{15})$.

Пример 20

Вычислите $\sqrt{61^2 - 11^2}$.

Решение. $\sqrt{61^2 - 11^2} = \sqrt{(61 - 11)(61 + 11)} = \sqrt{50 \cdot 72} =$
 $= \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 6 = 60$.

Ответ: 60.

Задачи для самостоятельного решения

96. Вычислите $\sqrt{35^2 - 28^2}$.
97. Вычислите $\sqrt{60^2 - 48^2}$.
98. Вычислите $\sqrt{68^2 - 60^2}$.
99. Вычислите $\sqrt{58^2 - 42^2}$.
100. Вычислите $\sqrt{52^2 - 20^2}$.

Пример 21

Вычислите $\frac{(3\sqrt{6})^2}{27}$.

Решение. $\frac{(3\sqrt{6})^2}{27} = \frac{3^2 \cdot (\sqrt{6})^2}{27} = \frac{9 \cdot 6}{27} = \frac{6}{3} = 2$.

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

101. Вычислите $\frac{(2\sqrt{5})^2}{10}$.
102. Вычислите $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$.
103. Вычислите $\frac{(4\sqrt{5})^2}{32}$.
104. Вычислите $\frac{(5\sqrt{7})^2}{50}$.
105. Вычислите $\frac{(5\sqrt{6})^2}{8}$.

Пример 22

Найдите значения выражения $\frac{^{10}\sqrt{a} \cdot ^{40}\sqrt{a}}{a^8 \sqrt{a}}$, при $a = 4$.

Решение. Сначала упростим выражение.

$$\frac{\sqrt[10]{a} \cdot \sqrt[40]{a}}{a\sqrt[8]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{10}} \cdot a^{\frac{1}{40}}}{a \cdot a^{\frac{1}{8}}} = a^{\frac{1}{10} + \frac{1}{40} - 1 - \frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{10} + \frac{1}{40} - \frac{1}{8} - 1} = a^{\frac{4+1-5}{40} - 1} = a^{-1} = \frac{1}{a} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Задачи для самостоятельного решения

106. Найдите значения выражения $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[24]{a}}{a\sqrt[8]{a}}$, при $a = 625$.

107. Найдите значения выражения $\frac{\sqrt[21]{a} \cdot \sqrt[42]{a}}{a\sqrt[14]{a}}$, при $a = 1,25$.

108. Найдите значения выражения $\frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[30]{a}}{a\sqrt[5]{a}}$, при $a = 0,8$.

109. Найдите значения выражения $\frac{\sqrt[24]{a} \cdot \sqrt[40]{a}}{a\sqrt[15]{a}}$, при $a = 2$.

110. Найдите значения выражения $\frac{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[8]{a}}{a\sqrt[24]{a}}$, при $a = 16$.

1.1.4. Логарифмы и их свойства

Пример 23

Найдите значение выражения $\log_4 32$.

Решение.

Преобразуем логарифм так, чтобы основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма, были равны:

$$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2} \log_2 2 = 2,5.$$

Ответ: 2,5.

Задачи для самостоятельного решения

111. Найдите значение выражения $\log_{10} 0,01$.

112. Найдите значение выражения $\log_{25} 125$.

113. Найдите значение выражения $\log_9 27$.

114. Найдите значение выражения $\log_2 0,5$.

Пример 24

Найдите значение выражения $\frac{\log_7 5}{\log_7 9} + \log_9 0,2$.

Решение.

Вспользуемся формулой перехода к новому основанию

$$\frac{\log_7 5}{\log_7 9} + \log_9 0,2 = \log_9 5 + \log_9 0,2 = \log_9 5 \cdot 0,2 = \log_9 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

115. Найдите значение выражения $\frac{\log_{2020} 5}{\log_{2020} 8} + \log_8 0,2$.

116. Найдите значение выражения $\frac{\log_9 2}{\log_9 4} + \log_4 0,5$.

117. Найдите значение выражения $\frac{\log_5 4}{\log_5 9} + \log_9 0,25$.

118. Найдите значение выражения $\frac{\log_{11} 8}{\log_{11} 12} + \log_{12} 0,125$.

119. Найдите значение выражения $\frac{\log_7 20}{\log_7 13} + \log_{13} 0,05$.

Пример 25

Найдите значение выражения $\log_a (ab^3)$, если $\log_b a = \frac{3}{14}$.

Решение.

Поскольку логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов этих чисел по тому же основанию, получим:

$\log_a (ab^3) = \log_a a + \log_a b^3 = 1 + \log_a b^3$. А далее применяем формулы:

$$\log_a b^k = k \log_a b \text{ и } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ находим } 1 + \log_a b^3 = 1 + 3 \log_a b =$$

$$= 1 + \frac{3}{\log_b a} = 1 + 3 : \frac{3}{14} = 1 + \frac{3 \cdot 14}{3} = 1 + 14 = 15.$$

Ответ: 15.

Задачи для самостоятельного решения

120. Найдите значение выражения $\log_a (ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{5}$.

121. Найдите значение выражения $\log_a (a^3 b^{10})$, если $\log_b a = \frac{5}{13}$.

122. Найдите значение выражения $\log_a (ab^6)$, если $\log_b a = \frac{3}{17}$.

123. Найдите значение выражения $\log_a (a^7 b^9)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.