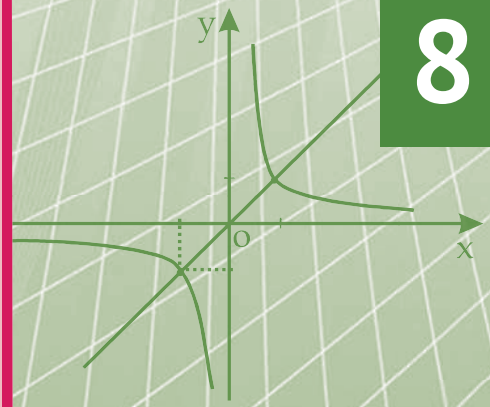
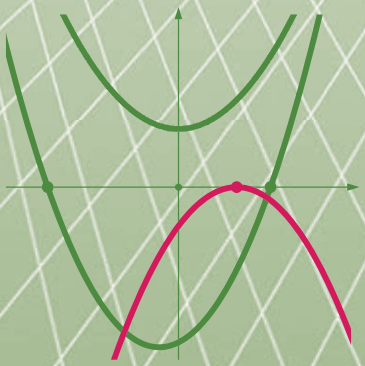
ЗАДАЧИ

В. В. ПРАСОЛОВ

АЛГЕБРА

8 класс





ФГОС

УДК 512.1+517.1+511.1
ББК 22.141+22.161
П70

Прасолов В. В.
П70 Задачи по алгебре. 8 класс. — М.: МЦНМО, 2020. — 94 с.
ISBN 978-5-4439-1400-8

Книга содержит задачи повышенной сложности по алгебре для учащихся 8 класса. Большинство из 10 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Затем приводятся решения нескольких наиболее типичных задач. После этого следуют задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и почти ко всем задачам даны указания.

Для учителей математики и для школьников, которые хотят научиться решать задачи, немного более сложные, чем задачи из учебника. По этой книге можно подготовиться к математическим олимпиадам, уровень которых ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

ББК 22.141+22.161

6+

ISBN 978-5-4439-1400-8

© Прасолов В. В., 2020.
© МЦНМО, 2020.

Оглавление

Предисловие 6

Список обозначений 7

Глава 12. Неравенства. Модуль числа 8

Линейные неравенства (9). Системы линейных неравенств (10). Доказательство неравенств (11). Модуль числа (12).

Глава 13. Квадратный корень 13

Сравнение корней (14). Тождества с корнями (14). Иррациональные квадратные корни (15). Избавление от иррациональности в знаменателе (16). Уравнения с корнями (16). Неравенства с корнями (17). Числа $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$ (17).

Глава 14. Квадратный трёхчлен 18

Текстовые задачи (19). Корни квадратного уравнения (20). Дискриминант (21). Формулы Виета (21). Уравнения с корнями (22). У квадратного трёхчлена не может быть трёх различных корней (22). Числа Фибоначчи (23). Разные задачи (23).

Глава 15. Рациональные уравнения 24

Биквадратные и возвратные уравнения (24). Корни многочленов (24). Уравнения с дробями (25).

Глава 16. Системы уравнений 26

Исключение неизвестных (28). Симметрические системы (28). Разложение на множители (28). Применение неравенств (29). Разные задачи (29).

Глава 17. Комплексные числа 31

Комплексные корни квадратных уравнений (31). Сопряжённые числа (32). Корни из единицы (32).

Глава 18. Парабола и гипербола 34

График квадратичной функции (35). График функции $y=\frac{1}{x}$ (37). Дробно-линейная функция (37).

Глава 19. Квадратные неравенства 38

Решение неравенств (38). Расположение корней квадратного трёхчлена (38). Разные задачи (39).

Глава 20. Комбинаторика и вероятность 40

Правило произведения (42). Перестановки (43). Размещения (43). Сочетания (43). Разные выборы (44). Комбинаторика в арифметике (44). Взаимно однозначные соответствия (44). Вероятность (45).

Глава 21. Дополнительные задачи 47

Многочлены (47). Целая и дробная части числа (47). Принцип Дирихле (49). Логические задачи (49).

Ответы 51

Указания 55

Предметный указатель 93

Глава 12

Неравенства. Модуль числа

Основные факты и понятия

Напомним, что запись $a > b$ ($a < b$) означает, что число a больше b (a меньше b), а запись $a \geqslant b$ ($a \leqslant b$) означает, что число a больше или равно b (a меньше или равно b).

Свойства неравенств.

1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
3. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
6. Если $a > b$, то $-a < -b$.

Неравенство $a > b$ называют *строгим*, а неравенство $a \geqslant b$ называют *нестрогим*.

Неравенства

$$a < b < c, \quad a \leqslant b < c, \quad a < b \leqslant c, \quad a \leqslant b \leqslant c$$

называют *двойными*.

Если $a > b > 0$, то $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Линейное неравенство (с двумя неизвестными x и y) — это неравенство вида $ax + by > c$, где a, b и c — некоторые числа, причём хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля. Линейное неравенство с тремя неизвестными x, y и z — это неравенство вида

$$ax + by + cz > d,$$

где хотя бы одно из чисел a, b и c отлично от нуля.

Модуль числа x — это число $|x|$, равное x при $x \geqslant 0$ и $-x$ при $x < 0$. Модуль числа называют также *абсолютной величиной* числа.

Примеры решения задач

Пример 1. Семь шоколадок дороже восьми пачек печенья. Что дороже: 8 шоколадок или 9 пачек печенья?

Решение. Пусть стоимость шоколадки равна x, а стоимость пачки печенья равна y. По условию $7x > 8y$. Поэтому

$$8x = \frac{8 \cdot 7x}{7} > \frac{8 \cdot 8y}{7} > 9y,$$

т. е. 8 шоколадок дороже, чем 9 пачек печенья.

Ответ. 8 шоколадок.

Пример 2. Дама сдавала в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Известно, что чемодан весит больше, чем рюкзак; саквояж и рюкзак весят больше, чем чемодан и корзина; корзина и саквояж весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Перечислите вещи дамы в порядке убывания их веса.

Решение. Если положить на левую чашу весов корзину и саквояж, а на правую — чемодан и рюкзак, то по условию весы будут в равновесии. Если затем поменять местами корзину и рюкзак, то левая чаша перевесит. Поэтому рюкзак весит больше корзины, а саквояж — больше чемодана. Кроме того, по условию чемодан весит больше рюкзака.

Ответ. Саквояж, чемодан, рюкзак, корзина.

Пример 3. Докажите, что $x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4}$.

Решение. Из тождества

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

следует, что $x(x-a) + \frac{a^2}{4} \geqslant 0$, т. е. $x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4}$.

Пример 4. Числа a и b различны. Решите уравнение $|x-a| = |x-b|$.

Решение. Если $x-a = x-b$, то $a = b$, что противоречит условию. Поэтому $x-a = -(x-b)$, т. е. $2x = a+b$.

Ответ. $x = \frac{a+b}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Линейные неравенства

12.1. Девять одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких книг стоят 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна книга?

12.2. Докажите, что если $a > b > 0$ и $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$, то $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}$.

12.3. Трое друзей купили мяч. Каждый из них внёс не больше половины суммы, внесённой двумя остальными. Обязательно ли они внесли поровну?

12.4. Пятеро друзей купили мяч. Могло ли оказаться, что каждые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

12.5. Найдите дробь, если известно, что она больше $\frac{5}{9}$ и меньше $\frac{4}{7}$, а её числитель меньше знаменателя на 16.

12.6. Найдите все пары чисел a и b, для которых при всех $x<0$ выполняется неравенство $ax+2<3x+b$.

Системы линейных неравенств

12.7. Школьники одного класса ходили в два туристических похода. В каждом походе мальчиков было меньше $\frac{2}{5}$ общего количества участников похода. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $\frac{4}{7}$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

12.8. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих равенству $3x+4y=32$ и неравенствам $x<y<\frac{3}{2}x$.

12.9. Запишите в строку пять чисел так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была отрицательна, а сумма всех чисел положительна.

12.10. Запишите в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых трёх последовательных чисел была положительна, а сумма всех 20 чисел была отрицательна.

12.11. Девять чисел таковы, что сумма каждых четырёх из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

12.12. Сумма любых четырёх из данных 25 чисел положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.

12.13. Докажите, что если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{10}$, то

$$\frac{1}{6}(a_1+a_2+\ldots+a_6) \leqslant \frac{1}{10}(a_1+a_2+\ldots+a_{10}).$$

12.14. Числа a, b, c и d отличны от нуля и $ad \neq bc$. Докажите, что для некоторых чисел x и y выполняются неравенства

$$ax > by \quad \text{и} \quad cx > dy.$$

12.15. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} a_1 - 3a_2 + 2a_3 \geqslant 0, \\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 \geqslant 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 \geqslant 0, \\ a_{100} - 3a_1 + 2a_2 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Докажите, что все эти числа равны друг другу.

Доказательство неравенств

12.16. Докажите, что $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ при $x > 0$ и $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$ при $x < 0$.

12.17. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$.

12.18. Какое наименьшее значение принимает величина $x + \frac{9}{x}$ при $x > 0$?

12.19. Число a положительное. Какое наименьшее значение принимает величина $x + \frac{a^2}{x}$ при $x > 0$? При каком x эта величина принимает наименьшее значение?

12.20. Числа $a_1, \ldots, a_n$ положительны, и их произведение равно 1. Докажите, что

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

12.21. Докажите, что если $a > 1$ и $b < 1$, то $a + b > 1 + ab$.

12.22. Числа x и y положительны, и $xy > x + y$. Докажите, что $x + y > 4$.

12.23. Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа, причём $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

12.24. Числа x, y и z положительны. Докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

12.25. Числа $y_1, \ldots, y_n$ положительны, и $\frac{x_1}{y_1} \leqslant \frac{x_2}{y_2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{x_n}{y_n}$. Докажите, что

$$\frac{x_1}{y_1} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \leqslant \frac{x_n}{y_n}.$$

12.26. Докажите, что если $x^2 + y^2 = a^2$, то $\frac{a^4}{2} \leqslant x^4 + y^4 \leqslant a^4$.

12.27. Докажите, что

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}\geqslant 6 \quad \text{при } x>0.$$

12.28. Докажите, что если $0\leqslant a, b, c, d\leqslant 1$, то

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)+a+b+c+d\geqslant 1.$$

Модуль числа

12.29. Докажите, что для любых двух чисел x и y выполняется неравенство $|x+y|\leqslant |x|+|y|$, причём это неравенство строгое тогда и только тогда, когда $xy<0$.

12.30. Решите уравнение $2x=|x|+1$.

12.31. Решите неравенство $|x+a|<|x-a-1|$ для данного числа a.

12.32. Докажите, что $|x+a|+|x-a|\geqslant 2|a|$.

12.33. Решите уравнение $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

12.34. Решите уравнение $|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|=6$.

12.35. Решите уравнение $|x-a|+|x-b|=a-b$ для данных чисел a и b, где $a>b$.

12.36. Решите уравнение $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

12.37. Докажите, что наибольшее из чисел x и y равно

$$\frac{x+y}{2}+\frac{|x-y|}{2},$$

а наименьшее из этих чисел равно

$$\frac{x+y}{2}-\frac{|x-y|}{2}.$$

12.38. Докажите, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x|<|y-z|$, $|y|<|z-x|$, $|z|<|x-y|$.

12.39. Докажите, что если $a+b+c+d>0$, $a>c$ и $b>d$, то $|a+b|>|c+d|$.

12.40. Докажите, что если $|x|<1$ и $|y|<1$, то $|x-y|<|1-xy|$.

12.41. Докажите, что для любых чисел x, y и z выполняется неравенство

$$|x|+|y|+|z|\leqslant |-x+y+z|+|x-y+z|+|x+y-z|.$$

12.42. Докажите, что если $|x|\leqslant a$ и $|x-y|\leqslant 1$, то $|x^2-y^2|\leqslant 2a+1$.

Глава 13

Квадратный корень

Основные факты и понятия

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a. Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

Арифметический квадратный корень из отрицательного числа не определён, $\sqrt{0}=0$.

Для положительного a уравнение $x^2=a$ имеет два корня: $x=\sqrt{a}$ и $x=-\sqrt{a}$.

Иррациональное число — это число, которое не является рациональным. Арифметический квадратный корень из натурального числа, которое не является полным квадратом, иррационален (пример 3).

При сравнении корней бывает удобно поставить вместо знака неравенства знак $\vee$ и рассматривать только преобразования, которые сохраняют знак неравенства. Если после нескольких таких преобразований выяснится, какой именно знак неравенства стоит в конце, то такой же знак неравенства стоит и в начале. Такое обозначение используется в решении примера 1.

Примеры решения задач

Пример 1. Какое из чисел больше: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$?

Решение. Воспользуемся обозначением $\vee$, о котором шла речь выше, и сделаем такие преобразования:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\vee\sqrt{11} \iff 2+2\sqrt{6}+3\vee 11 \iff 2\sqrt{6}\vee 6 \iff 6\vee 9.$$

Ясно, что $6<9$, поэтому $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{11}$.

Ответ. $\sqrt{11}$.

Пример 2. Докажите, что

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1 \quad \text{и} \quad \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1.$$