

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

# МАТЕМАТИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2019

УДК 51(075.8)  
М 34

Авторский коллектив

*С.Н. Веричев, А.В. Гобыш, О.Е. Рощенко, Е.А. Лебедева*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *Е.В. Семенко*,  
д-р техн. наук, профессор *Е.Г. Подружин*

Работа подготовлена на кафедре инженерной математики

М 34      **Математика:** учебное пособие / С.Н. Веричев, А.В. Гобыш, О.Е. Рощенко, Е.А. Лебедева. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2019. – 174 с.

ISBN 978-5-7782-3872-5

Настоящее учебное пособие содержит годовой объем материала и состоит из десяти глав.

По каждой теме приведены теоретические вопросы, задачи для решения как в аудитории, так и для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов нематематических специальностей. Может быть полезно преподавателям по математике для обучения студентов нематематических специальностей, а также студентам для самостоятельного изучения предмета «Математика».

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-7782-3872-5

© Авторский коллектив, 2019  
© Новосибирский государственный  
технический университет, 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	8
<b>Глава 1. Элементы векторной алгебры</b> .....	<b>9</b>
1.1. Определители второго и третьего порядка .....	9
1.1.1. Понятие матрицы .....	9
1.1.2. Определители второго порядка .....	10
1.1.3. Определители третьего порядка .....	10
1.2. Векторы. Линейные операции. Линейная зависимость .....	11
1.2.1. Понятие вектора, операции над векторами .....	11
1.2.2. Условие линейной зависимости и линейной независимости векторов на плоскости и в пространстве .....	15
1.2.3. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в базисе. Декартова система координат. Проекция вектора на ось .....	16
1.3. Геометрический смысл коэффициентов разложения вектора по декартовому базису. Направляющие косинусы. Радиус-вектор точки .....	20
1.4. Скалярное произведение векторов .....	22
1.4.1. Геометрические свойства скалярного произведения .....	22
1.4.2. Алгебраические свойства скалярного произведения .....	22
1.4.3. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах .....	23
1.5. Векторное и смешанное произведение .....	23
1.5.1. Векторное произведение векторов .....	23
1.5.2. Выражение векторного произведения в декартовых координатах .....	24

1.5.3. Смешанное произведение векторов .....	25
1.5.4. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах....	25
<b>Глава 2. Элементы аналитической геометрии.....</b>	<b>30</b>
2.1. Уравнение линии на плоскости.....	30
2.2. Уравнение поверхности и линии в пространстве.	
Уравнение прямой линии на плоскости и в пространстве.....	32
2.2.1. Уравнение поверхности в пространстве .....	32
2.2.2. Уравнение линии в пространстве .....	33
2.2.3. Прямая линия на плоскости.....	33
2.2.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.....	34
2.3. Угол между двумя прямыми. Условие перпендикулярности и параллельности двух прямых .....	37
2.4. Плоскость и прямые линии в пространстве.....	37
2.4.1. Плоскость в пространстве.....	37
2.4.2. Прямая линия в пространстве .....	39
2.4.3. Угол между прямой и плоскостью.....	40
2.4.4. Пересечение прямой и плоскости .....	41
2.5. Кривые второго порядка, их свойства.....	43
2.5.1. Эллипс .....	43
2.5.2. Гипербола.....	44
2.5.3. Парабола.....	45
<b>Глава 3. Предел и непрерывность функций .....</b>	<b>55</b>
3.1. Предел функции. Основные понятия .....	55
3.2. Предел дробно-рациональной функции. Иррациональные выражения ...	56
3.3. Бесконечно малые величины. Первый замечательный предел.....	59
3.4. Второй замечательный предел .....	61
3.5. Непрерывность функции.....	63

<b>Глава 4. Дифференциальное исчисление функции одной переменной</b> .....	67
4.1. Производная. Дифференциал. Производная сложной функции .....	67
4.2. Производная обратной функции, функций, заданных неявно и параметрически .....	71
4.3. Производные высших порядков .....	72
4.4. Геометрический и механический смысл производной .....	74
4.5. Дифференциал функции .....	76
4.6. Теоремы о дифференцируемых функциях .....	79
4.7. Правило Лопиталья–Бернулли .....	79
4.8. Формула Тейлора .....	82
<b>Глава 5. Неопределенный интеграл</b> .....	88
5.1. Первообразная и неопределенный интеграл .....	88
5.2. Основные свойства неопределенного интеграла .....	88
5.3. Таблица основных неопределенных интегралов .....	89
5.4. Основные методы интегрирования .....	89
5.5. Интегрирование простейших функций, содержащих квадратный трехчлен .....	94
5.6. Рациональные дроби .....	96
5.7. Интегрирование простейших рациональных дробей .....	96
5.8. Интегрирование некоторых тригонометрических функций .....	98
5.9. Интегрирование некоторых иррациональных функций .....	99
<b>Глава 6. Определенный интеграл</b> .....	104
6.1. Интегральная сумма. Понятие определенного интеграла. Геометрический и физический смысл определенного интеграла .....	104
6.2. Основные свойства определенного интеграла .....	107
6.3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница .....	110

6.4. Основные методы вычисления определенного интеграла .....	110
6.5. Несобственные интегралы .....	113
6.5.1. Несобственный интеграл первого рода (по бесконечному промежутку) .....	113
6.5.2. Несобственные интегралы второго рода (от неограниченных функций) .....	116
<b>Глава 7. Дифференциальное исчисление функции двух переменных .....</b>	<b>119</b>
7.1. Область определения функции двух переменных .....	119
7.2. Производная и дифференциал функции двух переменных .....	120
7.2.1. Частные производные первого порядка .....	120
7.2.2. Дифференцируемость и полный дифференциал функции .....	121
7.2.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков .....	123
7.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности .....	125
7.4. Экстремум функции двух переменных .....	127
7.5. Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в замкнутой области .....	128
<b>Глава 8. Двойные интегралы .....</b>	<b>133</b>
8.1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах .....	133
8.2. Вычисление двойных интегралов в полярных координатах .....	137
8.3. Применение двойных интегралов .....	139
<b>Глава 9. Обыкновенные дифференциальные уравнения .....</b>	<b>145</b>
9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка .....	145
9.1.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными ..	146
9.1.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка .....	148
9.1.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли .....	149
9.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	153

<b>Глава 10. Ряды</b> .....	157
10.1. Числовые ряды .....	157
10.1.1. Знакоположительные ряды.....	158
10.1.2. Знакопередающие ряды.....	162
10.2. Функциональные и степенные ряды .....	164
10.3. Разложение функций в степенные ряды .....	166
Библиографический список .....	173

## ГЛАВА 1

### ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

#### 1.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Этот раздел играет вспомогательную роль и посвящается определению понятий, определителей и рассмотрению некоторых их свойств.

##### 1.1.1. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ

1°. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Если матрица содержит  $m$  строк и  $n$  столбцов, то будем говорить, что матрица имеет размерность  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ . Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. В этом случае вместо термина «матрица размера  $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ », как правило, употребляется термин *квадратная матрица порядка  $\mathbf{n}$* . Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Ниже приведен пример матрицы размерности  $2 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0,5 & \pi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в записи матрицы мы не проводим линии, отделяющие одну строку от другой и один столбец от другого. Слева и справа матрица ограничивается круглыми скобками. В приведенном примере элементы матрицы  $A$  – это числа  $2, -5, \sqrt{2}, 0, 0,5, \pi$ .

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация. Так, произвольная матрица размера  $2 \times 3$  обозначается следую-



шим образом:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ . Первый индекс элемента означает номер строки (они считаются сверху вниз), а второй индекс – номер столбца (считаются слева направо). Заметим, что запись  $a_{ij}$  означает, что этот элемент в матрице расположен на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $A$ .

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковую размерность, и элементы, стоящие на соответствующих местах, совпадают.

### 1.1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу второго порядка:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . *Определителем* этой матрицы называется число, рав-

ное значению  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ . Например,  $\det A =$   
 $= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 3 + 8 = 11$ .

Элементы  $a_{11} \cdot a_{22}$  – образуют главную диагональ квадратной матрицы второго порядка, а элементы  $a_{12} \cdot a_{21}$  – ее второстепенную диагональ. Таким образом, *определитель второго порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на второстепенной диагонали.*

### 1.1.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

**Определение.** *Определителем матрицы третьего порядка* называется число, равное значению:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

либо  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$ . Например,  $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 20 - 18 - 15 + 6 - 16 = -67$ .

Формул для вычисления определителя третьего порядка несколько. Одна из них – *правило треугольника*, которое заключается в следующем: со знаком «плюс» берется произведение элементов, образующих главную диагональ, и элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» – произведение элементов, образующих второстепенную диагональ, и элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными второстепенной диагонали. Другой способ, например, способ разложения определителя по одной из строк либо столбцов:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Это равенство соответствует разложению определителя по первой строке. При этом знак перед каждым из слагаемых совпадает со знаком числа  $(-1)^{i+j}$ , где  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца (например:  $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$ ).

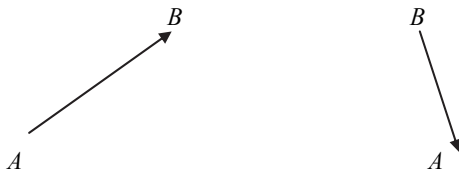
## 1.2. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

### 1.2.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА, ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Наряду со скалярными величинами (длина отрезка, величина угла, площадь, объем и т. д.) существуют такие величины, как *перемещение*, *скорость*, *ускорение*, *материальные точки*, *момент силы*, для которых необходимо задать не только величину, но и направление.

- Вектор – направленный отрезок.

Обозначения:  $\vec{S}, \vec{f}, \vec{AB}, \dots$  и т. д.



$A$  (.)  $A$  – начало вектора;

(.)  $B$  – конец вектора.

• *Длиной вектора  $\vec{AB}$*  называется расстояние от начала (.)  $A$  до конечной (.)  $B$ :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

• Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Коллинеарные векторы могут иметь или одинаковые направления, или противоположные.

**Обозначение:**  $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Два вектора называются равными, если они удовлетворяют условиям:

1) векторы имеют одинаковую длину  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ;

2) коллинеарные  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ;

3) имеют одинаковое направление и обозначаются  $\vec{a} = \vec{b}$ .

Векторы, зависящие от точки приложения (точки начала вектора), называются *связанными*.

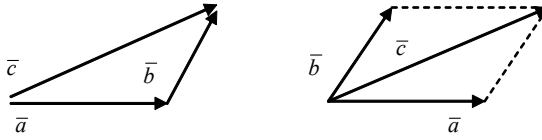
• Векторы, не зависящие от точки приложения, называются *свободными*.

В дальнейшем рассматриваем только свободные векторы.

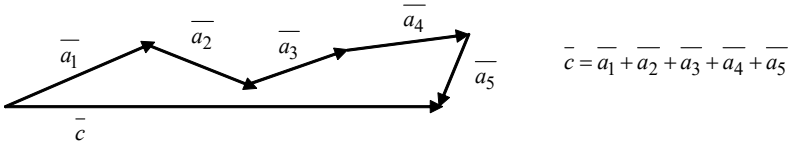
*Линейные операции:* сложение, вычитание, умножение вектора на действительное число.

*Суммой* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют вектор  $\vec{c}$ , идущий из начала вектора  $\vec{a}$  в конец вектора  $\vec{b}$ .

а) правило треугольника; б) правило параллелограмма



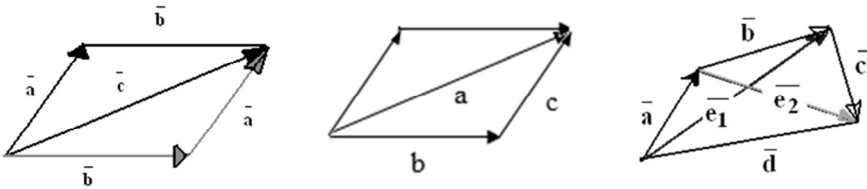
в) правило многоугольника



Если начало вектора совпадает с точкой его конца, то такой вектор называется *нулевым*.

В частности  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AB} = -\vec{BA}$ .

### Свойства операции сложения



- 1)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (коммутативность);
- 2)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (ассоциативность).

*Разностью*  $\vec{a} - \vec{b}$  двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называют такой вектор  $\vec{c}$ , который в сумме с вектором (вычитаемым)  $\vec{b}$  дает вектор (уменьшаемый)  $\vec{a}$ .

*Произведением*  $\alpha \cdot \vec{a}$  вектора  $\vec{a}$  на действительное число  $\alpha$  называется вектор, коллинеарный вектору  $\vec{a}$  и имеющий длину, равную произведению  $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$ , и направление или совпадающее с направлением вектора  $\vec{a}$  (если  $\alpha > 0$ ), или ему противоположное (если  $\alpha < 0$ ).

- Если  $\alpha > 0$ ,  $\alpha > 1$ , то вектор  $\alpha \cdot \vec{a}$  есть вектор  $\vec{a}$ , растянутый в  $\alpha$  раз.

- Если  $\alpha > 0, \alpha < 1$ , то  $\alpha \cdot \vec{a}$  – вектор  $\vec{a}$  сжатый в  $|\alpha|$  раз и имеющий то же направление, что исходный вектор.

- Если  $\alpha < 0, |\alpha| > 1$ , то вектор  $\alpha \cdot \vec{a}$  – вектор  $\vec{a}$ , растянутый в  $|\alpha|$  раз и обратно направленный.

- Если  $\alpha < 0, |\alpha| < 1$ , то  $\alpha \cdot \vec{a}$  – вектор  $\vec{a}$ , сжатый в  $\frac{1}{|\alpha|}$  раз и обратно направленный.

*Свойства операций  $\alpha \cdot \vec{a}$ :*

1)  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$  – дистрибутивность относительно суммы векторов;

2)  $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$  – дистрибутивность относительно суммы чисел;

3)  $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta)\vec{a}$  – ассоциативность числовых сомножителей.

### Условие коллинеарности двух векторов. Орт вектора

**Теорема.** Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны  $\Leftrightarrow$ , когда существует такое число  $\lambda$ , что имеет место равенство  $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ .

- Если вектор имеет при выбранном масштабе длину, равную единице, то он называется *единичным вектором* или ортом, т. е.  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

или:  $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0$ .

**Пример.** Каким условиям должны удовлетворять векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , чтобы вектор  $(\vec{a} + \vec{b})$  делил угол между ними пополам?

$(\vec{a} + \vec{b})$  – это диагональ параллелограмма, построенного на  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Но диагональ делит угол пополам лишь в случае, если параллелограмм есть ромб. Откуда следует, что  $\vec{a} = \vec{b}$ .

*Линейной комбинацией* векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$  называется сумма:

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{a}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n,$$

где  $\alpha_i$  – любые действительные числа.

Векторы  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$  называются *линейно зависимыми*, если существуют такие вещественные числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ , одновременно не равные нулю:  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ , такие что  $\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3} + \dots + \alpha_n \cdot \overline{a_n} = 0$ .

Если векторы не являются линейно зависимыми, то они *линейно независимы*.

### Свойства линейно зависимой совокупности векторов

**Свойство 1.** Если среди векторов  $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \dots, \overline{a_n}$  есть нулевой вектор, то эта совокупность линейно зависима.

**Следствие 1.** Линейно независимая совокупность векторов не может содержать нулевого вектора.

**Свойство 2.** Если к линейно зависимой совокупности векторов присоединить несколько векторов, то расширенная совокупность векторов также линейно зависима.

**Следствие 2.** Любая часть линейно независимой совокупности векторов будет линейно независимой.

### 1.2.2. УСЛОВИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ И ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

**ТЕОРЕМА.** Два вектора на плоскости линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  они коллинеарны.

**ТЕОРЕМА.** Три вектора в пространстве линейно зависимы  $\Leftrightarrow$  они компланарны.

**ТЕОРЕМА.** Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

**Следствие.** Каковы бы ни были три некопланарных вектора  $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ , для любого вектора  $\overline{d}$  существуют  $\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c}$ .

**1.2.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ.  
 КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ.  
 ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ.  
 ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ**

Запишем указанные выше равенства о представлении любого вектора  $\vec{c}$ , лежащего в одной плоскости с неколлинеарными векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , в виде их линейной комбинации:

$$\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b},$$

а также для некомпланарных векторов:

$$\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}.$$

Пусть  $L$  – некоторое множество векторов. Совокупность векторов  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \in L$  называется базисом на множестве  $L$ , если выполнены следующие условия:

- 1) векторы  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \in L$  – линейно независимы;
- 2) любой вектор  $\vec{a} \in L$  можно представить в виде линейной комбинации по данным векторам:

$$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n;$$

- 3) векторы  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \in L$  – упорядочены.

При этом выражение  $\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{e}_3 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{e}_n$  называется **разложением** вектора  $\vec{a}$  по базису  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \in L$ .

• Числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  называются *координатами вектора  $\vec{a}$  в данном базисе*.

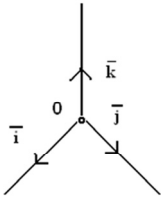
**ТЕОРЕМА.** Разложение любого вектора  $\vec{a}$  по данному базису единственно.

**ТЕОРЕМА.** При сложении векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  их соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число.

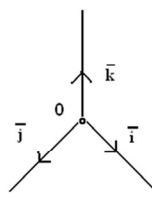
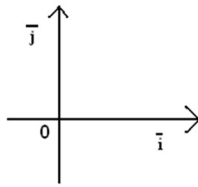
*Осью  $\vec{e}$*  называется прямая, на которой выбрано положительное направление и единица длины (масштаб).

## Декартова система координат

Геометрическое построение разложения вектора по базису на плоскости или в пространстве приводит к построению параллелограммов или параллелепипедов. Естественным становится выбор в качестве базисных векторов таких векторов, которые попарно перпендикулярны и имеют длины, равные единице, т. е.  $\underline{e}_1 \perp \underline{e}_2$ ,  $\underline{e}_2 \perp \underline{e}_3$ ,  $\underline{e}_1 \perp \underline{e}_3$  и  $|\underline{e}_1| = |\underline{e}_2| = |\underline{e}_3| = 1$ , векторы  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  – упорядочены. Тогда орты  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  образуют базис декартовой системы координат.



Правая система координат



Левая система координат

### Условие равенства и коллинеарности векторов в координатной форме

**ТЕОРЕМА.** Два вектора  $\underline{a} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$  и  $\underline{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$  равны  $\Leftrightarrow$ , когда их координаты равны:  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ . Два вектора коллинеарны  $\Leftrightarrow$  соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

## Векторное пространство

*Векторное пространство* есть множество произвольных элементов, называемых векторами, удовлетворяющее аксиомам векторного пространства.

1. Для любых векторов  $\underline{a}$  и  $\underline{b}$  из  $L$  определен вектор  $\underline{c}$ , называемой суммой  $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ , при этом:

- $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ ,
- $\underline{c} + (\underline{a} + \underline{b}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ .



2. В множестве векторов имеется нулевой вектор  $0 \equiv \vec{0}$ .

3. Для каждого вектора  $\vec{a}$  имеется ему противоположный  $-\vec{a}$ , такой, что  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .

4. Для каждого вектора  $\vec{a}$  определен вектор  $\lambda \cdot \vec{a}$ , называемый произведением вектора на действительное число  $\lambda$ , обладающий свойствами:

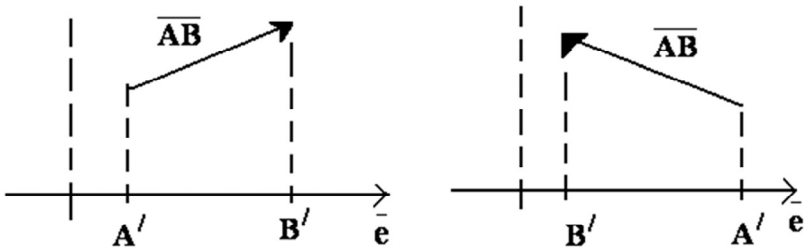
$$\lambda(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \lambda \cdot \vec{a}_1 + \lambda \cdot \vec{a}_2;$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a};$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1(\lambda_2 \cdot \vec{a}).$$

### Проекция вектора на ось

Проекцией точки  $M$  на ось  $\vec{e}$  называется основание перпендикуляра, опущенного на эту ось из точки  $M$ .



Проекцией вектора  $\vec{AB}$  на ось  $\vec{e}$  называется число, равное длине вектора  $\vec{A'B'}$ , заключенного между проекциями начала  $A$  и конца  $B$  вектора  $\vec{AB}$ , причем эта длина берется со знаком (+), если вектор и ось  $\vec{e}$  одинаково направлены и с отрицательным знаком (-), если направления вектора  $\vec{A'B'}$  и оси  $\vec{e}$  противоположны.

Проекция вектора есть величина скалярная.

- Под углом между вектором и осью понимается угол между вектором и ортом оси.
- Под углом между двумя векторами понимается тот угол, который не превосходит  $\pi$  :

**Веричев Станислав Николаевич  
Гобыш Альбина Владимировна  
Рощенко Ольга Евгеньевна  
Лебедева Елена Анатольевна**

**МАТЕМАТИКА**

**Учебное пособие**

Редактор *И.Л. Кескевич*  
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
Корректор *И.Е. Семенова*  
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

---

Подписано в печать 24.04.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 150 экз.  
Уч.-изд. л. 10,23. Печ. л. 11,0. Изд. № 308/18. Заказ № 806. Цена договорная

---

Отпечатано в типографии  
Новосибирского государственного технического университета  
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20