Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2019

УДК 51(075.8)
М 34

Авторский коллектив

С.Н. Веричев, *А.В. Гобыш*, *О.Е. Рощенко*, *Е.А. Лебедева*

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор *Е.В. Семенко*,
д-р техн. наук, профессор *Е.Г. Подружин*

Работа подготовлена на кафедре инженерной математики

М 34 **Математика**: учебное пособие / С.Н. Веричев, А.В. Гобыш, О.Е. Рощенко, Е.А. Лебедева. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2019. – 174 с.

ISBN 978-5-7782-3872-5

Настоящее учебное пособие содержит годовой объем материала и состоит из десяти глав.

По каждой теме приведены теоретические вопросы, задачи для решения как в аудитории, так и для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов нематематических специальностей. Может быть полезно преподавателям по математике для обучения студентов нематематических специальностей, а также студентам для самостоятельного изучения предмета «Математика».

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-7782-3872-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Этот раздел играет вспомогательную роль и посвящается определению понятий, определителей и рассмотрению некоторых их свойств.

1.1.1. ПОНЯТИЕ МАТРИЦЫ

1°. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, составленная из чисел. Если матрица содержит *m* строк и *n* столбцов, то будем говорить, что матрица имеет размерность **m × n**. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. В этом случае вместо термина «матрица размера **n × n**», как правило, употребляется термин *квадратная матрица порядка* **n**. Числа, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Ниже приведён пример матрицы размерности 2 × 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & \sqrt{2} \\ 0 & 0{,}5 & \pi \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в записи матрицы мы не проводим линии, отделяющие одну строку от другой и один столбец от другого. Слева и справа матрица ограничивается круглыми скобками. В приведенном примере элементы матрицы A – это числа 2, –5, $\sqrt{2}$, 0, 0,5, π.

Для обозначения элементов матриц применяется двойная индексация. Так, произвольная матрица размера 2 × 3 обозначается следующим образом: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$. Первый индекс элемента означает номер строки (они считаются сверху вниз), а второй индекс – номер столбца (считаются слева направо). Заметим, что запись a_{ij} означает, что этот элемент в матрице расположен на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы A.

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковую размерность, и элементы, стоящие на соответствующих местах, совпадают.

1.1.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу второго порядка: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. *Определителем* этой матрицы называется число, равное значению $\det A=\begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. Например, $\det A=$ $=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot 1-(-2)4=3+8=11$.

Элементы $a_{11}\cdot a_{22}$ – образуют главную диагональ квадратной матрицы второго порядка, а элементы $a_{12}\cdot a_{21}$ – ее второстепенную диагональ. Таким образом, *определитель второго порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали, минус произведение элементов, стоящих на второстепенной диагонали*.

1.1.3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА.

Определение. *Определителем матрицы третьего порядка* называется число, равное значению:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

либо $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A|$. Например, $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$
$= -4 - 20 - 18 - 15 + 6 - 16 = -67$.

Формул для вычисления определителя третьего порядка несколько. Одна из них – *правило треугольника*, которое заключается в следующем: со знаком «плюс» берется произведение элементов, образующих главную диагональ, и элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» – произведение элементов, образующих второстепенную диагональ, и элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными второстепенной диагонали. Другой способ, например, способ разложения определителя по одной из строк либо столбцов:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Это равенство соответствует разложению определителя по первой строке. При этом знак перед каждым из слагаемых совпадает со знаком числа $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, j – номер столбца (например: $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1$.

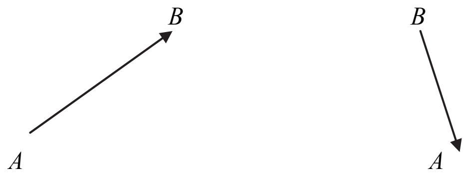
1.2. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

1.2.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА, ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Наряду со скалярными величинами (длина отрезка, величина угла, площадь, объем и т. д.) существуют такие величины, как *перемещение*, *скорость*, *ускорение*, *материальные точки*, *момент силы*, для которых необходимо задать не только величину, но и направление.

• Вектор – направленный отрезок.

Обозначения: $\overline{S}, \overline{f}, \overline{AB}, \ldots$ и т. д.



A (.) A – начало вектора;
(.) B – конец вектора.

• *Длиной вектора* $\overline{AB}$ называется расстояние от начала (.) A до конечной (.)B: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

• Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Коллинеарные векторы могут иметь или одинаковые направления, или противоположные.

Обозначение: $\overline{a} \| \overline{b}$

Два вектора называются равными, если они удовлетворяют условиям:

1) векторы имеют одинаковую длину $|\overline{a}| = |\overline{b}|$;

2) коллинеарные $\overline{a} \| \overline{b}$;

3) имеют одинаковое направление и обозначаются $\overline{a} = \overline{b}$.

Векторы, зависящие от точки приложения (точки начала вектора), называются *связанными.*

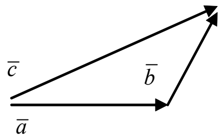
• Векторы, не зависящие от точки приложения, называются *свободными.*

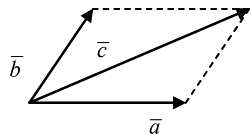
В дальнейшем рассматриваем только свободные векторы.

Линейные операции: сложение, вычитание, умножение вектора на действительное число.

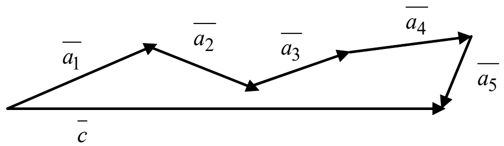
Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют вектор $\overline{c}$, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$.

а) правило треугольника; б) правило параллелограмма





в) правило многоугольника

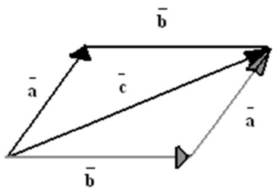


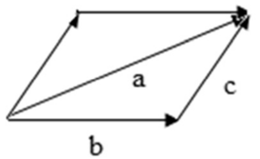
$\overline{c} = \overline{a_1} + \overline{a_2} + \overline{a_3} + \overline{a_4} + \overline{a_5}$

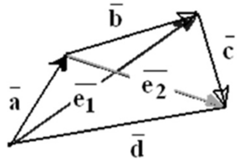
Если начало вектора совпадает с точкой его конца, то такой вектор называется *нулевым*.

В частности $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{0} \Rightarrow \overline{AB} = -\overline{BA}$.

Свойства операции сложения







1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (коммутативность);

2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ (ассоциативность).

Разностью $\overline{a} - \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с вектором (вычитаемым) $\overline{b}$ дает вектор (уменьшаемый) $\overline{a}$.

Произведением $\alpha \cdot \overline{a}$ *вектора* $\overline{a}$ *на действительное число* α называется вектор, коллинеарный вектору $\overline{a}$ и имеющий длину, равную произведению $|\alpha| \cdot |\overline{a}|$, и направление или совпадающее с направлением вектора $\overline{a}$ (если $\alpha > 0$), или ему противоположное (если $\alpha < 0$).

- Если $\alpha > 0$, $\alpha > 1$, то вектор $\alpha \cdot \overline{a}$ есть вектор $\overline{a}$, растянутый в α раз.

- Если $\alpha > 0, \alpha < 1$, то $\alpha \cdot \overline{a}$ – вектор $\overline{a}$ сжатый в $|\alpha|$ раз и имеющий то же направление, что исходный вектор.
- Если $\alpha < 0, |\alpha| > 1$, то вектор $\alpha \cdot \overline{a}$ – вектор $\overline{a}$, растянутый в $|\alpha|$ раз и обратно направленный.
- Если $\alpha < 0, |\alpha| < 1$, то $\alpha \cdot \overline{a}$ – вектор $\overline{a}$, сжатый в $\frac{1}{|\alpha|}$ раз и обратно направленный.

Свойства операций $\alpha \cdot \overline{a}$:

1) $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha \cdot \overline{a} + \alpha \cdot \overline{b}$ – дистрибутивность относительно суммы векторов;

2) $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{a}$ – дистрибутивность относительно суммы чисел;

3) $\alpha(\beta \cdot \overline{a}) = (\alpha \cdot \beta)\overline{a}$ – ассоциативность числовых сомножителей.

Условие коллинеарности двух векторов. Орт вектора

Теорема. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$, когда существует такое число λ, что имеет место равенство $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$.

- Если вектор имеет при выбранном масштабе длину, равную единице, то он называется *единичным вектором* или ортом, т. е. $\overline{a^0} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$ или: $\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \overline{a^0}$.

Пример. Каким условиям должны удовлетворять векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, чтобы вектор $(\overline{a}+\overline{b})$ делил угол между ними пополам?

$(\overline{a}+\overline{b})$ – это диагональ параллелограмма, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Но диагональ делит угол пополам лишь в случае, если параллелограмм есть ромб. Откуда следует, что $\overline{a} = \overline{b}$.

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n}$ называется сумма:

$$\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{a_n},$$

где α_i – любые действительные числа.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$, такие что $\alpha_1 \cdot \overline{a_1} + \alpha_2 \cdot \overline{a_2} + \alpha_3 \cdot \overline{a_3} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{a_n} = 0$.

Если векторы не являются линейно зависимыми, то они *линейно независимы*.

Свойства линейно зависимой совокупности векторов

Свойство 1. Если среди векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \ldots, \overline{a_n}$ есть нулевой вектор, то эта совокупность линейно зависима.

Следствие 1. Линейно независимая совокупность векторов не может содержать нулевого вектора.

Свойство 2. Если к линейно зависимой совокупности векторов присоединить несколько векторов, то расширенная совокупность векторов также линейно зависима.

Следствие 2. Любая часть линейно независимой совокупности векторов будет линейно независимой.

1.2.2. УСЛОВИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ И ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

ТЕОРЕМА. Два вектора на плоскости линейно зависимы $\Leftrightarrow$ они коллинеарны.

ТЕОРЕМА. Три вектора в пространстве линейно зависимы $\Leftrightarrow$ они компланарны.

ТЕОРЕМА. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Следствие. Каковы бы ни были три некомпланарных вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, для любого вектора $\overline{d}$ существуют $\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c}$.

1.2.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ. ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Запишем указанные выше равенства о представлении любого вектора $\overline{c}$, лежащего в одной плоскости с неколлинеарными векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, в виде их линейной комбинации:

$$\overline{c} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b},$$

а также для некомпланарных векторов:

$$\overline{d} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{b} + \gamma \cdot \overline{c}.$$

Пусть L – некоторое множество векторов. Совокупность векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots, \overline{e_n} \in L$ называется базисом на множестве L, если выполнены следующие условия:

1) векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots, \overline{e_n} \in L$ – линейно независимы;

2) любой вектор $\overline{a} \in L$ можно представить в виде линейной комбинации по данным векторам:

$$\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{e_n};$$

3) векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots, \overline{e_n} \in L$ – упорядочены.

При этом выражение $\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e_1} + \alpha_2 \cdot \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3} + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{e_n}$ называется **разложением** вектора $\overline{a}$ по базису $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \ldots, \overline{e_n} \in L$.

• Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ называются *координатами вектора* $\overline{a}$ *в данном базисе*.

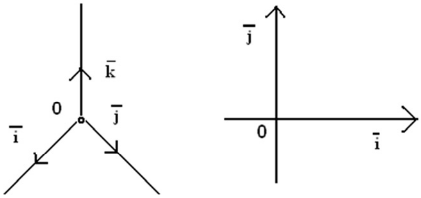
ТЕОРЕМА. Разложение любого вектора $\overline{a}$ по данному базису единственно.

ТЕОРЕМА. При сложении векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ их соответствующие координаты складываются. При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это же число.

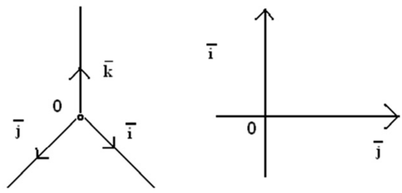
Осью $\overline{e}$ называется прямая, на которой выбрано положительное направление и единица длины (масштаб).

Декартова система координат

Геометрическое построение разложения вектора по базису на плоскости или в пространстве приводит к построению параллелограммов или параллелепипедов. Естественным становится выбор в качестве базисных векторов таких векторов, которые попарно перпендикулярны и имеют длины, равные единице, т. е. $\overline{e_1} \perp \overline{e_2}$, $\overline{e_2} \perp \overline{e_3}$, $\overline{e_2} \perp \overline{e_3}$ и $\left|\overline{e_1}\right| = \left|\overline{e_2}\right| = \left|\overline{e_3}\right| = 1$, векторы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – упорядочены. Тогда орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ образуют базис декартовой системы координат.



Правая система координат



Левая система координат

Условие равенства и коллинеарности векторов в координатной форме

ТЕОРЕМА. Два вектора $\bar{a} = \{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\}$ и $\bar{b} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ равны $\Leftrightarrow$, когда их координаты равны: $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$. Два вектора коллинеарны $\Leftrightarrow$ соответствующие координаты пропорциональны: $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Векторное пространство

Векторное пространство есть множество произвольных элементов, называемых векторами, удовлетворяющее аксиомам векторного пространства.

1. Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из L определен вектор $\bar{c}$, называемой суммой $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, при этом:

- $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$,
- $\bar{c} + (\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

2. В множестве векторов имеется нулевой вектор $0 \equiv 0$.

3. Для каждого вектора $\overline{a}$ имеется ему противоположный $-\overline{a}$, такой, что $\overline{a} + (-\overline{a}) = 0$.

4. Для каждого вектора $\overline{a}$ определен вектор $\lambda \cdot \overline{a}$, называемый произведением вектора на действительное число λ, обладающий свойствами:

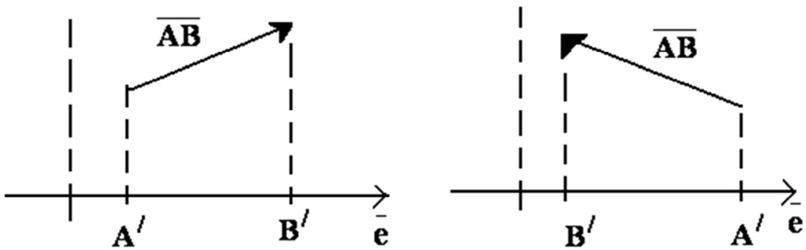
$$\lambda(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) = \lambda \cdot \overline{a}_1 + \lambda \cdot \overline{a}_2 ;$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{a} ;$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2)\overline{a} = \lambda_1(\lambda_2 \cdot \overline{a}) .$$

Проекция вектора на ось

Проекцией точки M на ось $\overline{e}$ называется основание перпендикуляра, опущенного на эту ось из точки *M*.



Проекцией вектора $\overline{AB}$ *на ось* $\overline{e}$ называется *число*, равное длине вектора $\overline{A'B'}$, заключенного между проекциями начала *A* и конца *B* вектора $\overline{AB}$, причем эта длина берется со знаком (+), если вектор и ось $\overline{e}$ одинаково направлены и с отрицательным знаком (–), если направления вектора $\overline{A'B'}$ и оси $\overline{e}$ противоположны.

Проекция вектора есть величина скалярная.

- Под углом *между вектором и осью* понимается угол между вектором и ортом оси.
- Под углом *между двумя векторами* понимается тот угол, который не превосходит π:

Веричев Станислав Николаевич
Гобыш Альбина Владимировна
Рощенко Ольга Евгеньевна
Лебедева Елена Анатольевна

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 24.04.2019. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 150 экз.
Уч.-изд. л. 10,23. Печ. л. 11,0. Изд. № 308/18. Заказ № 806. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20