В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский

МАТЕМАТИКА
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

СДАЁМ БЕЗ ПРОБЛЕМ!

ЕГЭ
2020

- ПОДРОБНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ
- КРАТКИЙ СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ВСЕМ ТЕМАМ
- ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ

УДК 373:51
ББК 22.1я721
М64

Мирошин, Владимир Васильевич.

М64 ЕГЭ 2020. Математика : решение задач / В. В. Мирошин, А. Р. Рязановский. — Москва : Эксмо, 2019. — 496 с. — (ЕГЭ. Сдаём без проблем).

ISBN 978-5-04-103008-7

Издание предназначено для подготовки учащихся к ЕГЭ по математике.

Пособие содержит полезную информацию для решения задач профильного уровня, основные понятия, определения, формулы, а также подробные решения более 500 задач. С помощью данного пособия учащийся сможет научиться решать задачи разного уровня сложности.

Издание окажет помощь учащимся не только при подготовке к ЕГЭ, но и к дополнительным вступительным испытаниям по математике, а также может быть использовано учителями при организации учебного процесса.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-04-103008-7

Содержание

ГЛАВА 1

ЧИСЛА. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ, ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Основные понятия и определения

Основным числовым множеством, которое изучается в школе, является множество R *действительных чисел*. Любое число $x \in R$ является или *рациональным*, или *иррациональным* числом. Таким образом, множество действительных чисел есть объединение двух множеств: множества Q рациональных чисел и множества $\overline{Q}$ иррациональных чисел: $R = Q \cup \overline{Q}$. Действительные числа удобно изображать в виде точек числовой прямой. При этом каждая точка числовой прямой изображает некоторое действительное число, и наоборот, каждое действительное число представляется некоторой точкой числовой прямой. Причем различным точкам соответствуют различные действительные числа.

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$, называется *отрезком* и обозначается $[a; b]$. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x \le b$ или $a \le x < b$, называется *полуинтервалом* и обозначается соответственно $(a; b]$ и $[a; b)$. Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a; b)$. Каждое из указанных множеств называется промежутком и может быть (в общем случае) обозначено $\langle a; b \rangle$.

Каждое рациональное число $r \in Q$ можно представить в виде отношения целого числа m к натуральному числу n: $r = \frac{m}{n}$, где $n \in N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $m \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots\}$. Таким образом, каждое натуральное число, нуль и любое целое отрицательное число являются рациональными, поскольку $n = \frac{n}{1}$, $0 = \frac{0}{1}$ и $-n = \frac{-n}{1}$. Рациональными числами являются, очевидно, все обыкновенные и конечные десятичные дроби, а также, что уже менее очевидно, все бесконечные периодические десятичные дроби. Действительно, если считать правило сложения «столбиком» верным и для бесконечного числа десятичных дробей, т.е. считать верным, например, следующее равенство:

$$0,(1)=0,1111...1...=0,1+0,001+...+0,\overbrace{000...0}^{(n-1)\,нуль}1+...,$$

то, воспользовавшись формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии $S=\dfrac{a_1}{1-q}$ со знаменателем $q=0,1$ и первым членом $a_1=0,1$, получим $0,(1)=\dfrac{0,1}{1-0,1}=\dfrac{0,1}{0,9}=\dfrac{1}{9}$.

Аналогично можно показать, что для любой чистой периодической десятичной дроби $0,(a_1a_2...a_n)$, дробная часть которой содержит только повторяющуюся группу цифр (период) $\overline{a_1,\ a_2...a_n}$, справедлива следующая **формула записи чистой периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби:**

$$0,(a_1a_2...a_n)=\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n\ девяток}}.$$

Например, $0,(1)=\dfrac{1}{9}$; $0,(2)=\dfrac{2}{9}$; $0,(9)=\dfrac{9}{9}=1$; $0,(17)=\dfrac{17}{99}$; $0,(1323)=\dfrac{1323}{9999}=\dfrac{147}{1111}$.

В случае смешанной периодической дроби поступают следующим образом:

$$0,78(1323)=\frac{78,(1323)}{100}=\frac{78+0,(1323)}{100}=\frac{78+\dfrac{1323}{9999}}{100}.$$

Выполнив сложение, получим $0,78(1323)=\dfrac{781245}{999900}$.

Число $\alpha\in\overline{Q}$, которое нельзя представить в виде отношения целых чисел, называется иррациональным числом. Отсюда следует, что **любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.** Но бесконечное число десятичных знаков записать невозможно! Поэтому для иррациональных чисел выбирают специальные обозначения в виде символов или букв. Например, иррациональными являются следующие числа $\sqrt{17}$; $\sqrt[14]{15}$; $5^{6,3}$; $\log_7 10$; $\sin\frac{\pi}{5}$, при записи которых использованы символы $\sqrt[n]{\ }$, $\log_a$; sin. Иррациональными являются, например, числа $\pi = 3,1415...$ и $e = 2,718281828...$.

Замечательным свойством действительных чисел, и в частности рациональных чисел, является тот факт, что рациональные числа расположены «между» действительными числами весьма плотно: *между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел.*

Пример 1. Среди всех обыкновенных несократимых дробей $\frac{m}{n}$, m, $n \in N$, лежащих между дробями а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{16}{21}$ и $\frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17}$ и $\frac{1}{3}$, найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

Решение, а) Пусть $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$. Тогда $3n < 6m < 4n$. Таким образом, на интервале $(3n;\ 4n)$ требуется найти наименьшее кратное 6. При $n = 1$; 2; 3; 4 интервал $(3n;\ 4n)$ не содержит кратных 6. При $n = 5$ интервал $(3n;\ 4n)$ имеет вид (15; 20), на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно: $18 = 63$, т.е. $m = 3$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь $\frac{3}{5}$.

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите б) $\frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}$; в) $\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$.

Пример 2. При каком значении параметра a на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежит ровно 101 целое число?

Решение. При любом a серединой интервала $(5 - 2a;$ $2a + 7)$ является число $x_0 = \frac{(5-2a)+(2a+7)}{2} = 6$. Следовательно, чтобы на интервале $(5 - 2a;\ 2a + 7)$ лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в правой полуокрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24{,}5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те a, для которых $24{,}5 < a \leq 25$.

Для натуральных чисел справедлива **основная теорема арифметики:**

Каждое натуральное число n, большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

где p_1, p_2, p_3, ... p_k — простые числа. Напомним, что натуральное число $p > 1$ называется **простым числом,** если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и p. Натуральное число $p > 1$, не являющееся простым, называется **составным числом.** Множество простых чисел — бесконечное множество.

Пример 3. Решите уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p, q — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

Решение. Пусть x — простой корень данного уравнения. Тогда $x \neq 0$ и данное уравнение равносильно уравнению $x = p - \frac{q}{x}$. Отсюда следует, что число $\frac{q}{x}$ — целое. Значит, число x — делитель числа q. По условию x и q — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно, $x = q$. Подставляя $x = q$ в данное уравнение, находим $q = p - 1$. Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид $x^2 - 3x + 2 = 0$, а его корни 1 и 2.

На множестве $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$ целых чисел определена особая операция: **деление с остатком.** Справедлива теорема:

Для любых целых чисел a и b существуют единственные целое число c и целое неотрицательное число r такие, что $a = bc + r$, причем $0 \leq r < |b|$.

При $r > 0$ число c называется **неполным частным** от деления a на b; при $r=0$ число c есть **частное** от деления a на b; b — **делитель** a; a — **кратное** b. Говорят также, что **число *b* делит число *a***. Записывают это так: $b|a$ или, что то же самое, **число *a* делится на *b***: $a \vdots b$. Из определения делимости натуральных чисел следует, что если $b|a$, то $1 \le b \le a$. Поэтому число натуральных делителей натурального числа a конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.

Пример 4. Определите последнюю цифру числа 3^{4567}.

Решение. Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3: $3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$, ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; ... . Период этой последовательности равен 4. Поскольку $4567=1141\cdot 4 + 3$, то последней цифрой данной степени является число 7.

При решении задач на натуральные числа полезны следующие понятия.

1. Наибольший общий делитель натуральных чисел *a* и *b*: НОД(*a*; b).

2. Наименьшее общее кратное натуральных чисел *a* и *b*: НОК[*a*; *b*].

Смысл этих понятий ясен из их названий. Например, НОД(12; 32)$=$4. Действительно, общими делителями чисел 12 и 32 являются числа 1; 2; 4. Других общих делителей эти числа не имеют. Из всех общих делителей 1; 2; 4 чисел 12 и 32 наибольшим является число 4. Поэтому наибольшим общим делителем 12 и 32 является число 4. В общем случае, если требуется найти наибольший общий делитель НОД(a; b) двух натуральных чисел, можно использовать их разложения на простые множители или воспользоваться **алгоритмом Евклида.** В нашем случае алгоритм Евклида выглядит следующей цепочкой равенств:

$$32=122 + 8;\ 12=81 + 4;\ 8=42.$$

Последний ненулевой остаток, равный в данном случае 4, и является НОД(12; 32).

Второй пример. Найдем НОК[12; 32]. Для этого разложим числа 12 и 32 в произведение простых сомножителей: $12=2^2\cdot 3$; $32=2^5$. Ясно, чтобы натуральное число k было общим кратным чисел 12 и 32, т.е. чтобы k делилось на 12 и на 32, необходимо и достаточно, чтобы $k=2^2\cdot 3\cdot 2^3\cdot m$, где $m\in N$. Отсюда при $m=1$ получим наименьшее общее кратное чисел 12 и 32. Поэтому НОК[12; 32]$=96$.

В общем случае для нахождения наименьшего общего кратного НОК[a; b] двух натуральных чисел a и b, где $a \geq b$, обычно сначала с помощью алгоритма Евклида находят НОД(a; b), а затем используют равенство НОК[a; b] НОД(a; b)$=ab$. В нашем случае

$$\text{НОК}[12;\ 32]=\frac{12\cdot 32}{\text{НОД}(12;\ 32)}=\frac{12\cdot 32}{4}=96.$$

Получили тот же самый результат.

Наибольший общий делитель НОД(a; b) натуральных чисел a и b, где $a > b$, обладает некоторыми полезными свойствами. Отметим наиболее очевидные.

1. НОД(a; b)$=$НОД(ka; kb), $k\in N$;
2. $\text{НОД}(\frac{a}{k};\ \frac{b}{k})=\frac{\text{НОД}(a;b)}{k}$;
3. НОД(a; b)$=$НОД(a; $a\pm b$).

Пример 5. Целые числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1 и –1. Является ли дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}$ сократимой при некоторых натуральных m и n?

Решение.

Пусть

$$d=\text{НОД}(5m-3n;\ 2m+5n) > 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{cases}5m-3n=dk,\\ 2m+5n=ds,\end{cases}$$

где числа k и s взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа d, отличный от 1. Запишем $m=\frac{5k+3s}{31}d$, $n=\frac{5s-2k}{31}d$. Отсюда $d=31q$.

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n}=2+\frac{1}{\frac{2m+5n}{m-13n}}=2+\frac{1}{2+\frac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n\neq 0).$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь $\frac{31n}{m-13n}$. Но числа m и n не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему. Например, при $m=23$, $n=-3$ получаем дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}=\frac{5\cdot 23+9}{2\cdot 23-15}=\frac{124}{31}$, которая сократима на 31.

При решении различных задач повышенной сложности нередко типичной проблемой является **сравнение чисел.** Напомним, что сравнение рациональных чисел осуществляется с помощью определения:

$$\frac{a}{b}<\frac{m}{n}\xrightarrow{\text{опр.}}an<bm\,.$$

В других случаях помогает свойство транзитивности неравенств:

$$\frac{a}{b}>\alpha,\alpha>\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{m}{n}\,.$$

При сравнении дробей полезны следующие теоремы.

Теорема.

Если числитель и знаменатель дроби положительны, то при их увеличении на одно и то же число неправильная дробь уменьшается, а правильная увеличивается, другими словами:

если $a>b>0$ и $c>0$, то $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$ и $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}$.

Пример 6. Сравните числа $\frac{1222333}{1333222}$ и $\frac{2222333}{2333222}$.

Решение. Использовать для сравнения приведенное выше определение не хочется. Придется перемножать семизначные числа! Используя теорему, заметив, что поскольку дробь $\frac{1222333}{1333222}$ правильная и $\frac{2222333}{2333222}=\frac{1222333+1000000}{1333222+1000000}$, то $\frac{1222333}{1333222}<\frac{2222333}{2333222}$.

При сравнении чисел, имеющих вид степени (или выражения с радикалами), используют теоремы, выражающие свойства степеней и радикалов.

Теорема.

Если $a > 0$, $b > 0$, то $a > b \Leftrightarrow a^{\beta} > b^{\beta}$, где β — положительное число.

Теорема.

Если $a > 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^{\alpha} > a^{\beta}$; если $0 < a < 1$ и $\alpha > \beta$, то $a^{\alpha} < a^{\beta}$.

Теорема.

Если $a \geq b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a^m} \geq \sqrt[n]{b^m}$, где n, m — натуральные числа.

Пример 7. Сравните числа 2^{300} и 3^{200}.

Решение. Поскольку $2^{300} = (2^3)^{100}$, а $3^{200} = (3^2)^{100}$, и $2^3 < 3^2$, то $2^{300} < 3^{200}$.

Пример 8. Сравните числа $2^{\sqrt{3}}$ *и* $3^{\sqrt{2}}$.

Решение. Здесь более сложный случай. По свойству степеней с основанием, большим 1, имеем $3^{\sqrt{2}} > 3^{1,4}$, а $2^{\sqrt{3}} < 2^2$. Сравним теперь числа $3^{1,4} = (3^{0,7})^2$ и 2^2. Для этого достаточно сравнить $3^{0,7}$ и 2 или $(3^{0,7})^{10}$ и 2^{10}. Но $(3^{0,7})^{10} = 3^7 = 2187$, а $2^{10} = 1024$. Теперь получаем цепочку неравенств:

$$1024 < 2187 \Leftrightarrow 2^{10} < 3^7 \Leftrightarrow 2 < 3^{0,7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^2 < 3^{1,4} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{3}} < 2^2 < 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}}.$$

Пример 9. Сравните числа $\sqrt[5]{5}$ и $\sqrt[6]{6}$.

Решение. Воспользуемся следующим свойством радикалов: если $a > 0$, то $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$, где n, k — натуральные числа.

Получим $\sqrt[5]{5} = \sqrt[30]{5^6}$ и $\sqrt[6]{6} = \sqrt[30]{6^5}$. Теперь достаточно сравнить степени 5^6 и 6^5. Оценим их отношение:

$$\frac{5^6}{6^5} = \frac{5}{\left(\frac{6}{5}\right)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^5} = \frac{5}{(1+0,2)^2(1+0,2)^3} =$$

$$= \frac{5}{(1+0,4+0,04)(1+0,6+0,12+0,008)} > \frac{5}{2 \cdot 2} > 1.$$

Таким образом, $\frac{5^6}{6^5}>1 \Leftrightarrow 5^6>6^5$ и, значит, $\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}$.

Замечания.

1) В данном случае степени 5^6 и 6^5 невелики, а именно $5^6=15625$, $6^5=7776$, и их нетрудно вычислить «вручную», т.е. без калькулятора. Можно и без вычислений оценить степени:

$$5^6=5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=125\cdot125>10000,$$

$$6^5=6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6=36\cdot36\cdot6<40\cdot40\cdot6=9600.$$

Поэтому $5^6>10000>9600>6^5$.

2) Если же степени действительно не поддаются вычислению (даже на калькуляторе), например, n^{n+1} и $(n+1)^n$, то можно использовать неравенство $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, верное при любом натуральном *n,* и поступить так:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\frac{n}{3}\geq1 \text{ при всех натуральных } n\geq3.$$

Упражнение. Докажите самостоятельно неравенство

$$\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}.$$

При сравнении чисел, которые являются значениями тригонометрических или логарифмических функций, обычно используются свойства соответствующих функций.

Перечислим некоторые свойства тригонометрических функций, связанные с неравенствами.

Если $-\frac{\pi}{2}<a\leq b<\frac{\pi}{2}$, то $\sin a\leq\sin b$ и $\operatorname{tg} a\leq\operatorname{tg} b$ (свойство монотонности).

Если $0<a\leq b<\pi$, то $\cos a\geq\cos b$ и $\operatorname{ctg} a\geq\operatorname{ctg} b$ (свойство монотонности).

Если $0<a\leq b<\pi$, то $\frac{\sin a+\sin b}{2}\leq\sin\frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-\frac{\pi}{2}<a\leq b<\frac{\pi}{2}$, то $\frac{\cos a+\cos b}{2}\leq\cos\frac{a+b}{2}$ (свойство выпуклости).

Если $-1\leq a\leq b\leq1$, то $\arcsin a\leq\arcsin b$, но $\arccos a\geq\arccos b$ (свойство монотонности).

Если $a \le b$, то $\operatorname{arctg} a \le \operatorname{arctg} b$, но $\operatorname{arcctg} a \ge \operatorname{arcctg} b$ (свойство монотонности).

Пример 10. Найдите множество значений функции[1]

$$y = \sin(0,5 \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x}))\,.$$

Решение. Сначала установим область определения данной функции. Поскольку функция $\sin t$ определена при любом t, то область определения данной функции совпадает с областью определения функции $y = \arccos t$, где $t = 0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x}$. По определению $\arccos t$ определен только на отрезке $-1 \le t \le 1$. Решим неравенство

$$-1 \le 0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x} \le 1\,.$$

Получим

$$-1 \le 0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x} \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 1 + \sqrt{1 - 0,5x} \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \le \sqrt{1 - 0,5x} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 0,5x \le 1, \\ 1 - 0,5x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le 2\,.$$

Итак, данная функция определена только на отрезке [0; 2]. При всех этих x имеем неравенство $0,5 \le 0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x} \le 1$ и поэтому

$$\arccos 0,5 \ge \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x}) \ge \arccos 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le \arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x}) \le \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le 0,5\arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x}) \le \frac{\pi}{6}\,.$$

Следовательно,

$$0 \le \sin(0,5\arccos(0,5 + 0,5\sqrt{1 - 0,5x})) \le \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, множество значений данной функции есть отрезок $\frac{1}{2}$.

Перечислим некоторые свойства логарифмических функций, связанные с неравенствами.

---

[1] Другие задания на нахождение области значений функции см. в главе 2.

Если $0<a\le b$ и $c>1$, то $\log_c a\le\log_c b$ (свойство монотонности).

Если $1<a\le b$ и $c>1$, то $0<\log_b c\le\log_a c$ (свойство монотонности).

Пример 11. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 4$.

Решение. Здесь можно поступить так. Сравним числа

$$\log_2 3-1=\log_2\frac{3}{2}\ \text{ и }\ \log_3 4-1=\log_3\frac{4}{3}.$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств

$$\log_2\frac{3}{2}>\log_2\frac{4}{3}>\log_3\frac{4}{3}.$$

Отсюда следует, что $\log_2 3>\log_3 4$.

В данном случае возможен второй способ. Пусть $\log_2 3=a$. Тогда

$$\log_3 4=2\log_3 2=\frac{2}{\log_2 3}=\frac{2}{a}.$$

Рассмотрим функцию $y=x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2-2}{x}$. При $x>0$ значения этой функции положительны при $x>\sqrt{2}$, и отрицательны при $0<x<\sqrt{2}$. Поэтому сравним числа a и $\sqrt{2}$, *т.е.* $\log_2 3$ *и* $\sqrt{2}=\log_2 2^{\sqrt{2}}$. Для этого достаточно сравнить числа 3 и $2^{\sqrt{2}}$. Имеем цепочку неравенств $2^{\sqrt{2}}<2^{1,5}\le 2\sqrt{2}<2\cdot 1,5=3$. Отсюда $\log_2 3=a>\sqrt{2}$ и поэтому значение $y(a)=a-\dfrac{2}{a}>0$. Следовательно,

$$\log_2 3-\log_3 4>0\Leftrightarrow\log_2 3>\log_3 4.$$

Часто при решении задач повышенной сложности приходится выполнять тождественные преобразования для того, чтобы данное выражение стало удобно для исследования. В основе этих преобразований лежат различные формулы. Перечислим некоторые из них, которые встречаются наиболее часто.

§ 2. Формулы сокращенного умножения

1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
2. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
3. $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

4. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$, $n \in N$.

5. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

6. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

7. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

8. $(a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$
$+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + nab^{n-1} + b^n, n \in Z$.

9. $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$.

10. $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$.

11. $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$.

12. $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2$.

13. $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

14. $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = \left(\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2$.

Пример 1. Найдите все действительные значения параметра a, при каждом из которых выражение $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2$ принимает наименьшее значение, если числа x_1 и x_2 — действительные, необязательно различные, корни уравнения $\dfrac{1}{x} - \dfrac{\sqrt{5-2a}}{x^2} = \dfrac{a}{x^3}$.

Решение. Число $x = 0$ не является корнем данного уравнения, которое поэтому можно переписать в виде равносильного уравнения

$$x^2 - x\sqrt{5-2a} - a = 0,$$

где $a \neq 0$. При каждом $a \leq 2{,}5$ и $a \neq 0$ это квадратное уравнение имеет действительные корни, если его дискриминант

$$D = (\sqrt{5-2a})^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow 5 + 2a \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -2{,}5.$$

Если $a > 2{,}5$, то данное уравнение не имеет действительных корней. Удобно воспользоваться теоремой Виета. Но сначала необходимо преобразовать выражение $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$. Получим

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=\frac{x_1^{\,4}+x_2^{\,4}}{(x_1x_2)^2}=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}.$$

Если $-2,5\le a\le 2,5$ и $a\ne 0$, то по теореме Виета находим $x_1+x_2=\sqrt{5-2a}, x_1\cdot x_2=-a$. Отсюда

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2=\frac{((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2}=$$

$$=\frac{(5-2a+2a)^2-2a^2}{a^2}=\frac{25}{a^2}-2.$$

Поскольку $-2,5\le a\le 2,5$ и $a\ne 0$, то $0<a^2\le 6,25$. Отсюда $\frac{25}{a^2}-2\ge\frac{25}{6,25}-2=2$. Следовательно, наименьшее значение выражения $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ равно 2 и оно достигается тогда и только тогда, когда $a^2=6,25\Leftrightarrow a=\pm 2,5$.

Ответ: $a=\pm 2,5$.

§ 3. Свойства степеней и логарифмов

3.1. Свойства степеней

Напомним, что степенью дествительного числа a называется выражение вида a^n, где a — основание степени, n — показатель степени. При этом если n — натуральное число, то степени $a^1=a$; $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}$, $n>1$; $a^0=1$, если $a\ne 0$; $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, если $a\ne 0$ определены для любого $a\in R$; если m — натуральное число, то степень $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$ определена для любого действительного числа $a\ge 0$; степень $a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ определена для любого действительного числа $a>0$; если α — иррациональное положительное число, то степень a^α определена для любого действительного числа $a\ge 0$ как предел последовательности рациональных степеней числа a, а именно $a^{\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}=\lim\limits_{n\to\infty} a^{\overline{r_n}}$, где r_n и $\overline{r_n}$ — последовательности рациональных чисел, таких, что для любого n справедливо неравенство $r_n<\alpha<\overline{r_n}$ и $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{r_n}$; степень $a^{-\alpha}$ определена для любого действительного числа $a>0$.

По поводу определения степени с иррациональным показателем отметим следующее. Поскольку в школьном курсе математики отсутствует строгое определение предела последовательности, а иногда имеется только некоторое пояснение этого сложного понятия, то и степень с иррациональным показателем можно понять только качественно, не точно. Учащийся должен понимать, что, например, степень $5^{\sqrt[3]{2}}$ есть некоторое положительное действительное число, найти первые десятичные знаки которого можно с помощью калькулятора, и так как $1{,}2<\sqrt[3]{2}<1{,}3$, то $5^{1{,}2}<5^{\sqrt[3]{2}}<5^{1{,}3}$.

Отметим, что следует различать выражение x^x и функцию $y=x^x$. Различие состоит в том, что выражение x^x определено при всех положительных действительных значениях x, а также при всех целых отрицательных значениях x. Функция $y=x^x$, которая называется показательно-степенной, имеет, по определению, область определения R_+, т.е. состоящую только из всех положительных действительных чисел: $R_+=(0;+\infty)$.

Перечислим теперь **свойства степени.**

1. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}, a,n,m\in R$.
2. $(a^n)^m=a^{n\cdot m}, a,n,m\in R$.
3. $a^n\cdot b^n=(ab)^n, a,n\in R$.
4. $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n, a,b,n\in R, b\neq 0$.

Свойства радикалов

Напомним, что понятие корня натуральной степени n из действительного числа a вводится для четных и нечетных показателей различно.

Если показатель корня — натуральное **четное** число, то есть $n=2k, k\in N$, то по определению

$$\sqrt[2k]{a} = b \xleftrightarrow{\text{опр.}} \begin{cases} b \geq 0, \\ a = b^{2k}. \end{cases}$$

Если показатель корня — натуральное **нечетное** число, то есть $n = 2k+1, k \in N$, то по определению

$$\sqrt[2k+1]{a} = b \xleftrightarrow{\text{опр.}} a = b^{2k+1}.$$

Отметим особо, что ни в первом случае, когда показатель корня — натуральное **четное** число, ни во втором, когда показатель корня — натуральное **нечетное** число, ничего не говорится о подкоренном выражении, в данном случае о числе a. Однако **из определения** корня четной степени **следует,** что корень четной степени из отрицательного действительного числа не определен.

Справедлива **теорема**[1]**:**

Для любого неотрицательного действительного числа a и произвольного натурального числа k существует единственное неотрицательное действительное число b такое, что $b^{2k} = a$.

Для любого действительного числа a и произвольного натурального числа k существует единственное действительное число b такое, что $b^{2k+1} = a$.

*В первом случае число b обозначают $\sqrt[2k]{a}$, а во втором $\sqrt[2k+1]{a}$. При этом неотрицательное значение корня из неотрицательного числа называют **арифметическим значением корня**[2] или просто **арифметическим корнем.***

Справедливы следующие свойства.

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$ и $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}, a \leq 0, b \leq 0.$
2. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$ и $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$ при любом a.
3. $x\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{x^{2k}a}$ при $x \geq 0$ и $x\sqrt[2k]{a} = -\sqrt[2k]{x^{2k}a}$ при $x < 0$.
4. $(\sqrt{a})^m \quad \sqrt{a^m}$ при $a \geq 0$, но при $a \leq 0$ $\sqrt[n]{a^{2k}} = (\sqrt[n]{-a})^{2k}$.

---

[1] Доказательство этой теоремы выходит за рамки программы школьного курса математики.

[2] Знак $\sqrt[n]{a}$ используется в школьном курсе математики для обозначения арифметического корня из неотрицательного числа, а при нечетном n — для обозначения единственного корня из данного числа. Например, $\sqrt[3]{-1} = -1$.

5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ при любом a, если m, n — натуральные нечетные числа, и при $a\geq 0$, если хотя бы одно из натуральных чисел m, n — четное.

Пример 1. При каком целом положительном x значение выражения $\sqrt{\frac{x-7}{x+3}}\cdot\frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}$ ближе всего к числу 0,7?

Решение. Данное выражение определено при выполнении трех условий:

1) $\frac{x-7}{x+3}\geq 0$;

2) $x^2-4x-21\geq 0$ и

3) $x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49\neq 0$.

По условию $x>0$, и с учетом 1) и 2) находим, что $x\geq 7$. Заметим, что

$$x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49=(x^2-49)-(x+7)\sqrt{(x+3)(x-7)}=$$
$$=(x+7)\left(x-7-\sqrt{(x+3)(x-7)}\right).$$

Отсюда следует, что число 7 не удовлетворяет условию 3). При $x>7$, $(x+7)\left(x-7-\sqrt{(x+3)(x-7)}\right)<0$. Следовательно, искомые значения x удовлетворяют условию $x>7$.

Преобразуем данное выражение с учетом условия $x>7$. Сначала поработаем с числителем и знаменателем. Получим

$$9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2=(3-x)(3+x)+$$
$$+(x-3)\sqrt{(x+3)(x-7)}=(3-x)(3+x)+$$
$$+(x-3)\sqrt{(x+3)(x-7)}=(3-x)\sqrt{3+x}\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{x-7}\right).$$
$$x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49=(x+7)(x-7)-$$
$$-(x+7)\sqrt{(x+3)(x-7)}=(x+7)\sqrt{x-7}\left(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3}\right).$$

Поэтому $\sqrt{\frac{x-7}{x+3}}\cdot\frac{9+(x-3)\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\sqrt{x^2-4x-21}-49}=$

$$=\sqrt{\frac{x-7}{x+3}}\cdot\frac{(3-x)\sqrt{3+x}\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{x-7}\right)}{(x+7)\sqrt{x-7}\left(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+3}\right)}=\frac{x-3}{x+7}.$$

Решим уравнение $\frac{7}{10}=\frac{x-3}{x+7}$. Получим $x=26\frac{1}{3}$. Рассмотрим функцию $y=\frac{x-3}{x+7}$. Так как $y=\frac{x-3}{x+7}=1-\frac{10}{x+7}$, то при возрастании x от 7 до $+\infty$ значения дроби $\frac{10}{x+7}$ уменьшаются от $\frac{5}{7}$ до 0 и выполняется неравенство $0<\frac{10}{x+7}<\frac{5}{7}$. Следовательно, на промежутке $(7;+\infty)$ функция $y=\frac{x-3}{x+7}=1-\frac{10}{x+7}$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left(\frac{2}{7};1\right)$. Так как функция $y=\frac{x-3}{x+7}$ монотонно возрастает и $y\left(26\frac{1}{3}\right)=0{,}7$, то условию задачи может удовлетворять или 26, или 27. Найдем $y(26)=\frac{23}{33}$ и $y(27)=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}$. Теперь сравним два числа $0{,}7-\frac{23}{33}=\frac{1}{330}$ и $\frac{12}{17}-\frac{7}{10}=\frac{1}{170}$. Так как $\frac{1}{330}<\frac{1}{170}$, то значение $y(26)=\frac{23}{33}$ ближе всего к 0,7.

Ответ: 26.

3.2. Свойства логарифмов

Напомним, что число $\alpha=\log_a p$ называется **логарифмом** действительного числа p по основанию a, где $a>0$, $a\neq 1$, если $a^\alpha=p$, т.е. логарифм числа p по основанию a есть тот показатель степени, при возведении в который числа a получим данное число p.

Можно написать, что если $a>0$, $a\neq 1$, то $a^\alpha=p\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\log_a p=\alpha$.

То же самое можно записать в виде тождества: если $a>0$, $a\neq 1$, то $a^{\log_a p}=p$ **(основное логарифмическое тождество).**

Из определения логарифма следует, что логарифм отрицательного числа и нуля не определены. Ограничения $a>0$, $a\neq 1$ на основание a логарифма иногда полезно записывать в виде $\frac{a}{|a-1|}>0$.

Справедлива **теорема**[1]**:**

Для любого положительного действительного числа p *и произвольного действительного числа* a *такого, что* $\frac{a}{|a-1|}>0$, *существует единственное действительное число* $\alpha=\log_a p$.

Отсюда следует, что любое действительное число можно рассматривать как логарифм некоторого числа, вычисленного по определенному основанию. Например, число $5{,}4=\log_7\left(7^{5,4}\right)$. В общем случае для любого действительного α справедливо равенство $\alpha=\log_a\left(a^{\alpha}\right)$.

Справедливы следующие свойства:

1. $\log_a(pq)=\log_a p+\log_a q$ при любом $a>0$, $a\neq1$, $p>0$, $q>0$. Если $a>0$, $a\neq1$, $p<0$, $q<0$, то $\log_a(pq)=\log_a(-p)+$ $+\log_a(-q)$.

2. $\log_a\left(\frac{p}{q}\right)=\log_a p-\log_a q$ при любом $a>0$, $a\neq1$, $p>0$, $q>0$. Если $a>0$, $a\neq1$, $p<0$, $q<0$, то $\log_a\left(\frac{p}{q}\right)=\log_a(-p)-$ $-\log_a(-q)$.

3. $\log_{a^k}\left(p^s\right)=\frac{s}{k}\log_a p$ при любом $s>0$, $a>0$, $a\neq1$, $p>0$. Если $a\neq1$, k, s — четные целые числа, то $\log_{a^k}\left(p^s\right)=\frac{s}{k}\log_{|a|}|p|$.

Например,

$\log_5\left(a^8\right)=8\log_5|a|$; $\log_{b^4}\left(a^6\right)=\frac{6}{4}\log_{|b|}|a|=1{,}5\cdot\log_{|b|}|a|$, при $0<|b|\neq1$.

4. $\log_a p\cdot\log_b q=\log_b p\cdot\log_a q$ при любом $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$, $p>0$, $q>0$. В частности, справедливы формулы перехода к другому основанию (модуль перехода):

$$\log_a p=\frac{\log_b p}{\log_b a} \text{ и } \log_a b=\frac{\log_b p}{\log_b q}.$$

Указанное свойство можно записать следующим образом:

$$\frac{\log_a p}{\log_a q}=\frac{\log_b p}{\log_b q},$$

[1] Доказательство этой теоремы выходит за рамки программы школьного курса математики.

то есть отношение логарифмов, имеющих одно и тоже основание, не зависит от этого основания.

5. Полезны следующие представления степеней через логарифм: $a^b = c^{b\log_c a}$ при любом b, $a>0$, $c>0$, $c\neq 1$; $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ при любом $a>0$, $b>0$, $(a-1)(b-1)>0$ и $a^{\sqrt{\log_b a}} = c^{\sqrt{\log_a b}}$.

Пример 2. Выразите $\log_{0,75} 72$ через x, если $x=\log_2 3$.

Решение. Воспользуемся формулой перехода к основанию 2:

$$\log_{0,75} 72 = \frac{\log_2 72}{\log_2 0{,}75} = \frac{\log_2 8 + \log_2 9}{\log_2 3 - \log_2 4} = \frac{3+2\log_2 3}{\log_2 3 - 2} = \frac{3+2x}{x-2}.$$

Преобразование выражений, содержащих тригонометрические и/или обратные тригонометрические функции, осуществляется с помощью тригонометрических формул.

§ 4. Тригонометрические формулы

4.1. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же числа (угла)

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, для любого x.

2. $\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1$, для любого $x \neq \frac{\pi n}{2}$, где n — любое целое число.

3. $1+\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ или $\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{\mathrm{ctg}^2 x}{1+\mathrm{ctg}^2 x}$ для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где n — любое целое число (в последнем случае для любого $x \neq \pi n$).

4. $1+\mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ или $\sin^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 x} = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ для любого $x \neq \pi n$, где n — любое целое число (в последнем случае для любого $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$).

4.2. Формулы сложения

5. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, для любых x и y.

6. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, для любых x и y.

7. $\mathrm{tg}(x+y)=\dfrac{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}y}{1-\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y}$ для любых x и y, таких что $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, где n — произвольное целое число.

4.3. Формулы кратных углов

8. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$, для любых x.

9. $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

10. $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$.

11. $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$.

12. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

4.4. Формулы приведения

Формулы приведения позволяют свести вычисление значений тригонометрических функций в произвольных точках числовой оси к вычислению значений тригонометрических функций в тех точках x, которые удовлетворяют неравенству $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4}(0^\circ\leq x\leq 45^\circ)$. Выпишем некоторые из них:

1) $\sin(-x)=-\sin x$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$;

3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$;

4) $\sin(\pi-x)=\sin x$;

5) $\cos(\pi+x)=-\cos x$;

6) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=\mathrm{ctg}x$;

7) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-\mathrm{tg}x$;

8) $\mathrm{tg}(2\pi-x)=\mathrm{tg}x$.

Особенно полезны так называемые **формулы дополнения (или дополнительных углов)**, которые удобно записать в следующем виде.

Теорема.

Если $x+y=\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin x=\cos y;\ \cos x=\sin y;$$
$$\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}y;\ \operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}y;$$

если $x+y=\pi$, то

$$\sin x-\sin y=0,\ \cos x+\cos y=0;$$
$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=0;\ \operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y=0.$$

Пример 1. Вычислите $\frac{\cos 247^\circ \sin 131^\circ-\sin 401^\circ \sin 337^\circ}{\sin 92^\circ \sin 160^\circ-\cos 200^\circ \sin 358^\circ}$.

Решение. Преобразуем выражение по формулам приведения так, чтобы углы были не больше 45°. Получим:

$$\frac{\cos 247^\circ \sin 131^\circ-\sin 401^\circ \sin 337^\circ}{\sin 92^\circ \sin 160^\circ-\cos 200^\circ \sin 358^\circ}=$$
$$=\frac{\cos(270^\circ-23^\circ)\sin(90^\circ+41^\circ)-\sin(360^\circ+41^\circ)\sin(360^\circ-23^\circ)}{\sin(90^\circ+2^\circ)\sin(180^\circ-20^\circ)-\cos(180^\circ+20^\circ)\sin(360^\circ-2^\circ)}=$$
$$=\frac{-\cos 23^\circ \cos 41^\circ-\sin 41^\circ \sin 23^\circ}{\cos 2^\circ \sin 20^\circ-\cos 20^\circ \sin 2^\circ}=-\frac{\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ}=-1.$$

4.5. Формулы сложения тригонометрических функций (преобразование суммы функций в произведение)

1. $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ для любых x и y.
2. $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$ для любых x и y.
3. $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ для любых x и y.
4. $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ для любых x и y.
5. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$ для любых x и y таких, что

$x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, где n — произвольное целое число.