

Г. В. Куповых
Д. В. Тимошенко

Основы гидромеханики

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮФУ
РОСТОВ-НА-ДОНУ·ТАГАНРОГ

УДК 532.5(075.8)
ББК 22.253я73
К923

Печатается по решению кафедры высшей математики Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета (протокол №7 от 21 февраля 2018 г.)

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики ТИ им. А.П. Чехова (филиал Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)) *А. А. Илюхин*

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ВМ ИКТИБ ИТА ЮФУ *А. Г. Клово*

Куповых, Г. В.

К923 Основы гидромеханики : учебное пособие / Г. В. Куповых, Д. В. Тимошенко ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2018. – 143с.

ISBN 978-5-9275-2920-9

Учебное пособие составлено на базе материалов по дисциплинам «Техническая физика», «Гидромеханика» и «Гидравлика», реализованных в 2007 – 2018 гг. для студентов инженерных направлений подготовки ЮФУ в г. Таганроге.

Пособие содержит информацию о свойствах гидромеханических сред, основных законах гидростатики, кинематических и динамических уравнениях движения для ламинарного и турбулентного режимов, а также моделирование нестационарных гидромеханических течений. В конце каждого тематического раздела имеются теоретические вопросы и практические задания.

Предназначено для студентов и аспирантов, обучающихся в Инженерно-технологической академии ЮФУ, а также представляет интерес для преподавателей аналогичных и смежных дисциплин.

УДК 532.5(075.8)
ББК 22.253я73

ISBN 978-5-9275-2920-9

© Южный федеральный университет, 2018
© Куповых Г. В., Тимошенко Д. В., 2018
© Оформление. Макет. Издательство Южного федерального университета, 2018

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ

1.1. Гидромеханическая модель жидкостей и газов

Общеизвестны три основных агрегатных состояния вещества: *твердое, жидкое* и *газообразное.* Отдельно рассматривается четвертое состояние – *плазма*, которая обладает специфическими свойствами. Под агрегатным состоянием вещества понимается его способность сохранять форму и объем, а также дополнительным признаком являются способы и свойства перехода вещества из одного агрегатного состояния в другое.

Твердые тела обладают свойством сохранять форму и объем. Переход в жидкое состояние осуществляется путем плавления, а в газообразное – путем сублимации.

Жидкость (и так называемые *аморфные* вещества) обладает свойством текучести, т.е. сохраняет объем, но не форму. В твердое состояние жидкость может перейти путем кристаллизации (процесс обратный плавлению), а в газообразное – путем испарения. Следует отметить, что очень вязкие жидкости могут быть похожи на твердые тела (по форме), но существенно отличаются от них вследствие молекулярного строения по характеру плавления.

Газ не обладает свойствами сохранения ни формы, ни объема. Вне силовых полей он занимает весь доступный объем. Газообразная атмосфера Земли существует благодаря гравитационному полю (силе тяжести), вследствие чего не рассеивается в космическом пространстве. В жидкое состояние газ переходит путем конденсации, а непосредственно в тверое тело – путем осаждения.

Из курса классической физики изучается механическое движение, т.е. изменение положения в пространстве с течением времени тел (или его частей) относительно друг друга. Для описания этой формы движения используются две абстрактные идеализированные модели: материальная точка и абсолютно твердое тело. Напомним, что материальной точкойназывается тело конечной массы, размером которого можно пренебречь при решении данной задачи. Абсолютно твердым телом называется тело, состоящее из совокупно-

сти материальных точек, расположенных на неизменном расстоянии относительно друг друга и сохраняющих расположение при действии внешних сил. Если допустить изменение взаимного расположения материальных частиц, то придём к модели ой среды.

Для описания механических свойств жидкостей (или газов) *модель сплошной среды* является общепринятой. Сплошной средой называется механическая система с бесконечно большим числом степеней свободы внутри себя, а её движение описывается скалярным полем плотности и векторным полем скоростей, также при необходимости к ним могут добавляться поля других физических величин (концентрации частиц, температуры и т.д.). Таким образом, для описания физических свойств жидкостей и газов можно использовать макроскопические характеристики [1], т.е. считать, что масштаб гидромеханической частицы намного превышает характерные размеры и расстояния между молекулами.

Для моделирования гидромеханических сред принимаются несколько базовых физических гипотез: о сплошности и однородности сферической изотропии и естественном ненапряженном состоянии.

В соответствии с гипотезой о сплошности жидкость до деформации, в процессе деформации и после остается сплошной (без образования пустот, разрывов или трещин). Расстояние между ближайшими точками сплошной среды сколь угодно мало. Эта гипотеза является основой для математического описания движения и позволяет использовать математический аппарат непрерывных функций, дифференциальное и интегральное исчисления.

Сплошная среда является *однородной*, если свойства выделенных из нее одинаковых объемов одинаковы. В частности, ее плотность (удельный вес) во всех точках должна быть одинаковой.

Сплошная среда считается *изотропной* по отношению к какому-либо свойству, если это свойствов любой точке будет одинаковым по всем направлениям. Если же свойства зависят от направления в точке, то среда является *анизотропной*.

Согласно гипотезе о *естественном ненапряженном состоянии*, существующие до приложения нагрузок *напряжения* в материале принимаются равными нулю. Следует отметить, что эта гипотеза не выполняется в поле силы тяжести.

Гидромеханическую частицу можно считать малым элементом абстрактной сплошной среды в выделенной области пространства. Таким образом, ее физические характеристики являются непрерывными пространственно-временными функциями, а ее движение описывается дифференциальными уравнениями.

Если используются модели сплошной среды, то плотность (ρ, кг/м^3 в СИ) или удельный вес (γ, Н/м^3) жидкости или газа могут быть определены как локальные характеристики [2–5], которые, строго говоря, не совпадают, но близки по сути:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad \gamma = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}, \tag{1.1}$$

где Δm – масса, а $\Delta P = \Delta m \cdot g$ – вес бесконечно малого элемента объемом ΔV; – ускорение свободного падения. В гидромеханике обычно используются конечные приращения массы и объема. Связь между плотностью и удельным весом очевидна: $\rho = \gamma \cdot g$.

Приведем некоторые сведения о значениях плотности (кг/м^3) жидких и газообразных сред при нормальном атмосферном давлении (10^5 Па) и заданной температуре: воздух (0 °С) – 1,29; кислород (0 °С) – 1,43; вода (4 °С) – 1000; нефть (4 °С) – 800.

1.2. Вязкость

Сформулируем основные понятия и законы, описывающие вязкое состояние гидромеханической среды.

Вязкость среды (или *внутреннее трение*) – свойство тел, обладающих свойством текучести, оказывать сопротивление относительному перемещению своих частей при явлениях переноса, сопровождающихся потерями энергии в виде тепла вследствие взаимодействия молекул внутри вещества.

Рассмотрим понятие *сдвиговой вязкости,* которая является физической характеристикой жидких (газообразных) сред, вследствие способности оказывать сопротивление относительному движению слоев внутри среды. В классической механике Ньютона ее аналогом является сила трения скольжения.

Сформулируем закон Ньютона вязкого трения [6–7]:

$$P_{в.тр.} = \mu \cdot S \cdot \frac{du_x}{dy}, \tag{1.2}$$

где $P_{в.тр.}$, Н – сила внутреннего трения; μ, Па·с – динамическая вязкость; S – площадка верхнего слоя, на который действует сила внутреннего трения; dy – расстояние между верхним и нижним слоями, значения скорости течения в которых различаются на величину du_x (рис. 1.1).

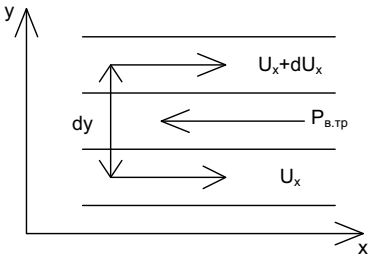


Рис. 1.1. К закону вязкого трения

Введем определение касательного напряжения, Па:

$$\tau_x = \frac{P_{в.тр.}}{S} = \mu \frac{du_x}{dy}. \tag{1.3}$$

Физический смысл касательного напряжения – давление со стороны жидкости на участок верхнего слоя. В гидромеханических уравнениях наряду с распространенным понятием динамической вязкости часто используется кинематическая вязкость, м/с^2:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{1.4}$$

Из формулы (1.4) следует, что вязкость зависит от физических условий, прежде всего температурных, в которых находится среда. С ростом температуры значения вязкости жидких сред уменьшается, а для газов – растет, что объясняется различием их молекулярных структур [9–10].

Эмпирическая зависимость значений кинематической вязкостиот давления:

$$\nu = \nu_0 \cdot e^{b \cdot P}, \tag{1.5}$$

где p – давление; $b \approx 0,02 \div 0,03$ $МПа^{-1}$ – пьезокоэффициент (разный для газов и жидкостей), зависящий от температуры (рис.1.2).

Из формулы (1.5) также следует, что значения кинематической вязкости увеличиваются с ростом давления.

При быстрой объемной механической деформации среды возникает явление объемной вязкости (μ_V), которая приводит к тепловым потерям (диссипации) энергии. Характер температурной зависимости объемной вязкости и изменений с ростом давления имеет аналогичные закономерности, что и для кинематической вязкости.

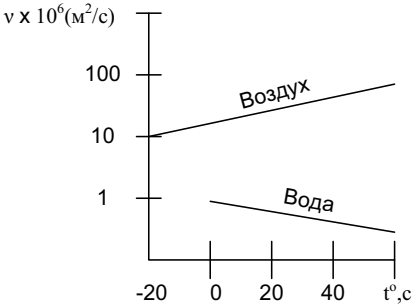


Рис. 1.2. Зависимость значений вязкостиот температуры

Приведем некоторые сведения о вязкости некоторых жидкостей и газов [7–8]. Значения динамической вязкости (μ, Па·с): воздух (15 °С) – $1,78 \cdot 10^{-5}$; метан (27 °С) – 11,2; вода (15 °С) – 0,0011; глицерин (20 °С) – 1,49; минеральное масло (30 °С) – 0,21; жидкий азот (–197 °С) – $1,58 \cdot 10^{-4}$. Значения объемной вязкости (в относительных единицах μ_V/μ): вода (15 °С) – 2,81; минеральное масло (30 °С) – 1,33.

1.3. Сжимаемость

Сжимаемость – физическая характеристика, определяющая способность вещества (в любом агрегатном состоянии) изменять свой объём под действием внешнего давления.

Для количественного описания введем дополнительное новое понятие коэффициента объемного сжатия, Па$^{-1}$:

$$\beta_{сж} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}, \tag{1.6}$$

где V – объем среды; dV – его малое приращение при изменении давления на dp. Знак «минус» в формуле (1.6) обусловлен тем, что приращению значения функции давления соответствует уменьшение значения функции объема.

В дальнейшем удобно использовать величину, обратную $\beta_{сж}$, которая называется модулем объемной упругости, Па:

$$B = \frac{1}{\beta_{сж}}. \tag{1.7}$$

Предполагая выполнение закона сохранения массы в модели сплошной среды и гипотезу об ее однородности, т.е. о равномерном распределении плотности ρ по объему V можно получить соотношение

$$dm = d(\rho \cdot V) = 0 \;\Rightarrow\; Vd\rho = -\rho dV.$$

Учитывая выражения (1.6) и (1.7), для модуль объемной упругости получаем выражение

$$B = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho}. \tag{1.8}$$

Необходимо отметить, что размерность величины модуля объемной упругости совпадает с размерностью величины гидростатического давления.

Опишем равновесное состояние жидкой (или газообразной) среды, основными параметрами которого являются давление p, плотность ρ (или γ – удельный объем) и температура θ. Уравнение равновесного состояния среды в неявном виде можно представить, как

$$f(p, \rho, \theta) = 0.$$

В качестве дополнительного уравнения для совершенного (идеального) газа можно использовать уравнение Клайперона

$$p = \rho \cdot R \cdot \theta, \tag{1.9}$$

где θ – температура в градусах Кельвина; R – газовая постоянная. Для воздуха (молярная масса равна 0,029 кг/моль) имеем R = 287 Дж/кг·К.

Рассмотрим изотермическое (постоянное по температуре) состояние (θ = const) гидромеханической среды. Тогда из формул (1.8) и (1.9) следует выражение для изотермического модуля объемной упругости газа, который числено равен гидростатическому давлению:

$$B_{и.г.} = p \,. \tag{1.10}$$

Рассмотрим адиабатическое состояние гидромеханической частицы, когда нет теплообмена с окружающей средой:

$$\frac{p}{\rho^k} = const \,, \tag{1.11}$$

где безразмерный параметр $k = \frac{c_P}{c_V}$ – показатель адиабаты; c_P и c_V – удельные теплоемкости, соответственно, при постоянном давлении и постоянном объеме.

В соответствии с формулами (1.8) и (1.11), после несложных математических действий можно получить:

$$\frac{dp}{d\rho} = k \cdot \rho^{k-1} \Rightarrow B_{а.г.} = k \cdot \rho^k = k \cdot p \,.$$

Тогда выражение для адиабаческого модуля объемной упругости газа получаем как

$$B_{а.г.} = k \cdot p \,. \tag{1.12}$$

Из формул (1.10) и (1.12) следует связь между абиабатическим и изотермическим модулями объемной упругости

$$\frac{B_{а.г.}}{B_{и.г.}} = \kappa \,. \tag{1.13}$$

Для воздуха это соотношение равно 1,4.

Модули объемной упругости могут быть представлены двумя различными определениями.

Средний изотермический модуль объемной упругости – отношение конечных приращений давления и объема среды:

$$B'_{и.ж.} = -V_{0ж} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V_{ж}}, \qquad (1.14)$$

где $V_{0ж}$ – начальное значение объема газа; Δp – изменение значения давления, при котором объем меняется на $\Delta V_{ж}$.

Локальный изотермический модуль объемной упругости определяется в дифференциальной форме:

$$B''_{и.ж.} = -V_{0ж} \cdot \frac{dp}{dV_{ж}}. \qquad (1.15)$$

Физическое содержание дифференциальных параметров, входящих в формулу (1.15), аналогично параметрам формулы (1.14).

Для изотермического и адиабатического процессов выражения для среднего и локального модулей одинаковы, но необходимо понимать, что условия измерений, входящих в них величин различны в зависимости от характера процесса.

Значения локальных модулей объемной упругости для изотермических и адиабатических процессов связаны соотношением удельных теплоемкостей.

$$\frac{B''_{а.ж.}}{B''_{и.ж.}} = \frac{c_{Pж}}{c_{Vж}}, \qquad (1.16)$$

которое меняется в диапазоне $(1,25 \div 1,08)$ в зависимости от температуры (0÷240°С). Сами значения локальных модулей также зависят от давления [11].

Существует простой способ экспериментального определения значения локального адиабатического модуля объемной упругости, на основе измерения скорости звука в газах.

Воспользуемся (без вывода) формулой Лапласа [11] для скорости звука

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \qquad (1.17)$$

Из совместного рассмотрения формул (1.8) и (1.17) для локального адиабатического модуля объемной упругости следует формула

$$B_a = \rho \cdot c^2 \,. \tag{1.18}$$

Тогда из формул (1.9), (1.17) и (1.18) следует выражение для скорости звукав газообразной среде:

$$c = \sqrt{k \cdot R \cdot \theta} \,. \tag{1.19}$$

Расчет для атмосферного воздуха при температуре $\theta = 273\ K$ и k=1,4 дает для скорости звука значение $c \approx 331$ м/с, что хорошо согласуется со справочными данными.

Соответственно, измерив скорости звука другими методами в другой газообразной среде с известной плотностью, можно рассчитать для нее значение локального адиабатического модуля объемной упругости.

1.4. Упругие свойства смеси «жидкость–газ»

В подразд. 1.1 – 1.3 использовалась модель сплошной среды, где предполагалось, что газы – совершенные (идеальные), а жидкости – однородны по своей структуре.

Для механики жидкостей и газов ближе модель реальных газов, которые могут переходить в жидкое и даже в твёрдое состояние, а в модели идеального газа это неосуществимо. Как известно из курса физики, состояние реальных газов описывается уравнением Ван дер Ваальса, учитывающим межмолекулярное взаимодействие:

$$p = \frac{R \cdot \rho \cdot \theta}{1 - b \cdot \rho} - a \cdot p^2 \,,$$

$$a = \frac{3 \cdot 10^{-3} \cdot p_0}{\rho_0^2} \,, \qquad b = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{\rho_0} \,. \tag{1.20}$$

Коэффициенты *a* и *b* приведены для воздуха при нормальных условиях ($p_0 = 10^5$ Па, θ = 273 К). Тем не менее уравнение (1.19) не универсально, так как оно расходится с экспериментом в области двухфазных состояний, т.е. при состояниях, близких к фазовым переходам, его применение некорректно.

Приведем несколько примеров.

1. *Испарение воды.* Процесс испарения происходит в режиме насыщения, что является состоянием вблизи фазового перехода «жидкость-пар» при фиксированных значениях параметров температуры и давления ($T_{нас}$ = const, $p_{нас}$ = const). Когда давление в жидкости достигает значения давления насыщенного пара, она переходит в неустойчивое состояние, которое сопровождается процессом появления в жидкости каверн, заполненных паром (явление кавитации), что в итоге приводит к нарушению гипотезы об однородности сплошной среды, т.е. известные уравнения состояния неприменимы.

2. *Растворение воздуха в дистиллированной воде.* Объем воздуха, который может раствориться в воде до достижения насыщения, без учета его влияния на сжимаемость образующейся смеси, определяется выражением

$$V_г = k_P \cdot V_ж \cdot \frac{p_2}{p_1}, \tag{1.21}$$

где $V_г$ – объем растворенного воздуха при нормальных условиях; $k_P \approx 0{,}16$ – коэффициент растворимости (t = 20 °C); p_1 и p_2 – начальное и конечное значения давления в воде (ниже значения насыщения); $V_ж$ – объем воды.

Определим сжимаемость смеси (вода–воздух) и покажем, что она больше, чем сжимаемость воды с растворенным воздухом. Рассчитаем модуль объемной упругости смеси с учетом влияния нерастворенного воздуха. Предположим, что при увеличении давления смеси на dp ее объем также увеличится на $dV_{см}$. Очевидно, что приращение объема смеси $dV_{см}$ равно сумме приращений объемов воды $dV_ж$ и воздуха $dV_г$:

$$dV_{см} = dV_ж + dV_г. \tag{1.22}$$

Согласно формуле (1.8) для соответствующих приращений объемов воды и воздуха, можно записать:

$$dV_ж = -\frac{V_ж}{B_ж} \cdot dp, \quad dV_в = -\frac{V_в}{B_в} \cdot dp. \tag{1.23}$$

Следует отметить, что в формуле (1.23) модули объемной упругости $B_ж$ и $B_в$ могут быть как изотермическими, так и адиабатическими в зависимости от условий измерений.

Из формул (1.22) и (1.23) получаем:

$$dV_{см} = -\frac{V_{ж}}{B_{ж}}\left(1+\frac{V_{в}\cdot B_{ж}}{V_{ж}\cdot B_{в}}\right)\cdot dp \quad . \tag{1.24}$$

Используя выражение для смеси

$$B_{см} = -V_{см}\cdot\frac{dp}{dV_{см}} \quad , \tag{1.25}$$

из формулы (1.24) получаем выражение для модуля объемной упругости:

$$B_{см} = \frac{V_{см}\cdot B_{ж}}{V_{ж}\left(1+\frac{V_{в}\cdot B_{ж}}{V_{ж}\cdot B_{в}}\right)} \quad . \tag{1.26}$$

Очевидно, что $V_в << V_ж$, поэтому можно приближенно считать $V_{см} \approx V_{ж.}$ Тогда из выражения (1.25) следует:

$$B_{см} = \frac{B_{ж}}{1+\frac{V_{в}\cdot B_{ж}}{V_{ж}\cdot B_{в}}} \quad . \tag{1.27}$$

При быстро протекающих процессах модуль $B_ж$ (для воды) близок к адиабатическому, а $B_в$ (для воздуха) – к изотермическому. Таким образом, при условии неизменного воздухосодержания смеси диапазон изменения значений модуля объемной упругости $B_{см}$ можно принять от значений изотермического ($B_{и.г.} = p$) до адиабатического ($B_{а.г.} = k\cdot p$) модулей.

Рассчитаем значения модуля объемной упругости $B_{см}$ для разных изопроцессов. При давлении p = 20 МПа значение модуля равно $B_ж$ = 1450 Мпа. Предположим, что объем воздуха составляет ~ 0,1 % от объема жидкости. Тогда значения модуля для смеси $B_{см}$ равны: изотермическое состояние – $B_{см.и} = 1352\ \ МПа$; адиабатическое состояние – $B_{см.а} = 1374\ \ МПа$. Таким образом, отличие составляет около 5–7 %.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ 5
1.1. Гидромеханическая модель жидкостей и газов 5
1.2. Вязкость 7
1.3. Сжимаемость 9
1.4. Упругие свойства смеси «жидкость–газ» 13
Вопросы и задания 17
2. ГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖИДКОЙ СРЕДЫ 18
2.1. Модель напряженного состояния 18
2.2. Модель жидкости в равновесном состоянии 23
2.3. Геометрии свободной поверхности жидкости в состоянии относительного покоя 29
2.4. Расчет сил гидростатического давления жидкости на криволинейные поверхности 34
2.5. Плавание твердых тел в жидкости 38
Вопросы и задания 40
3. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖИДКОЙ СРЕДЫ 41
3.1. Выбор системы координат 41
3.2. Понятие индивидуальной производной 43
3.3. Кинематические характеристики течения жидкости 44
3.4. Движение жидкой частицы и его составляющие 48
3.5. Вихревые линии и циркуляция скорости 51
3.6. Потенциальное движение жидкости 54
Вопросы и задания 55
4. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖИДКОЙ СРЕДЫ 57
4.1. Математическое введение 57
4.2. Закон сохранения массы в переменных Эйлера 59
4.3. Закон сохранения импульса в переменных Эйлера 61
4.4. Закон сохранения энергии в переменных Эйлера 64
4.5. Диссипация энергии при переносном движении жидкости 66
4.6. Закон Бернулли для идеальной жидкости 67
Вопросы и задания 72

5. ЛАМИНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОЙ СРЕДЫ …….. 73
5.1. Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости ……. 73
5.2. Элементы теории подобия для гидромеханических процессов . 75
5.3. Моделирование ламинарного движения жидкости в плоском канале …… 78
5.4. Моделирование ламинарного течения жидкости в трубе …… 82
5.5. Моделирование ламинарного течения жидкости в кольцевом зазоре …….. 87
5.6. Моделирование ламинарного течения жидкости между движущимися стенками …….. 90
5.7. Пограничный слой при ламинарном течении жидкости ……. 92
Вопросы и задания …… 97
6. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ….. 99
6.1. Элементы теории гидродинамической устойчивости …… 99
6.2. Статистические характеристики турбулентного движения …… 101
6.3. Моделирование турбулентного течения жидкости …….. 103
6.4. Турбулентная вязкость ……... 106
6.5. Моделирование турбулентного плоского течения вблизи твердой поверхности …… 108
6.6. Моделирование турбулентного потока в плоском канале ……... 113
6.7. Расчет сопротивления трения цилиндрических труб ……... 117
6.8. Расчет сопротивления крылового профиля …….. 121
Вопросы и задания …… 124
7. НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ …….. 125
7.1. Модель нестационарного течения вязкой сжимаемой жидкости в упругой цилиндрической трубе …… 125
7.2. Моделирование нестационарного течения вязкой сжимаемой жидкости в жесткой цилиндрической трубе ……... 131
7.3. Модель гидравлического удара …… 134
Вопросы и задания …… 137
ЗАКЛЮЧЕНИЕ …….. 138
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ …… 139