


В. В. Лисяк
Н. К. Лисяк

# Моделирование информационных систем

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮФУ
РОСТОВ-НА-ДОНУ · ТАГАНРОГ

УДК 658.512(075)
ББК 32.84(Я73)
Л639

*Печатается по решению кафедры систем автоматизированного проектирования Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета (протокол № 6 от 13 января 2018 г.)*

**Рецензенты:**

зав. кафедрой прикладной математики и информационных систем Таганрогского института управления и экономики, доктор технических наук, профессор *В. П. Карелин*

профессор кафедры систем автоматизированного управления Института радиотехнических систем и управления ЮФУ, доктор технических наук, профессор *В. И. Финаев*

**Лисяк, В. В.**

Л639 Моделирование информационных систем : учебное пособие / В. В. Лисяк, Н. К. Лисяк ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2018. – 88 с.

ISBN 978-5-9275-2881-3

В учебном пособии рассматривается программная имитация непрерывных случайных величин с заданным законом распределения, фиксация и обработка результатов статистического моделирования, вопросы моделирования систем массового обслуживания, а также практические вопросы моделирования производительности систем.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы и технологии».

УДК 658.512(075)
ББК 32.84(Я73)

ISBN 978-5-9275-2881-3

© Южный федеральный университет, 2018
© Лисяк В. В., Лисяк Н. К., 2018
© Оформление. Макет. Издательство Южного федерального университета, 2018

# 1. ИМИТАЦИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В процедуре имитации (генерации) значений непрерывных случайных величин с заданным распределением, как правило, применяют следующие методы:

- нелинейных преобразований с наиболее широко используемым в этой группе методом обратной функции;
- ступенчатой аппроксимации;
- композиции.

Перечисленные методы успешно применяются в статистическом моделировании при решении разнообразных практических задач. Чаще всего исходными данными в этих методах являются последовательности равномерно распределённых чисел на интервале [0,1).

## 1.1. Метод обратной функции

Метод обратной функции наиболее часто используется среди методов, объединённых под общим названием методы нелинейных преобразований. Метод обратной функции характеризуется тем, что максимально точно воспроизводит требуемый закон распределения. При этом его точность ограничивает только погрешность компьютерных вычислений и псевдослучайность исходных данных.

В основе рассматриваемого метода лежит следующая закономерность. Если $\xi$ и $\eta$ случайные величины, первая из которых имеет равномерный закон распределения, а вторая – дифференциальную функцию распределения $f_\eta(x_i)$, то $\xi$ и $\eta$ связаны между собой следующим уравнением:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\eta} f_\eta(x)dx. \qquad (1.1)$$

Решив уравнение (1) относительно $\eta$, можно установить зависимость между $\eta$ и $\xi$.

Недостатком метода обратной функции является его применимость только к таким законам распределения, которые допускают решение уравнения (1.1) аналитически.

Покажем применение рассматриваемого метода для генерации случайных величин на примере нескольких широко распространённых законов распределения.

1. Экспоненциальный закон распределения

Экспоненциальный закон имеет следующий вид функции распределения $f_\eta(x)=\mu e^{-\mu x}$ при $x \geq 0$. Подставим функцию распределения $f_\eta(x)$ в выражение (1) и решим уравнение относительно $\eta$

$$\xi = \int_0^\eta \mu \cdot x^{-\mu x} \cdot dx = -e^{-\mu x}\Big|_0^\eta = 1 - e^{-\mu \eta};$$

$$\eta = -\frac{1}{\mu} ln(1-\xi). \tag{1.2}$$

С помощью соотношения (1.2) вычисляются значения экспоненциально распределенной случайной величины $\eta$ с параметром $\mu$, используя значения равномерно распределённой случайной величины на интервале [0,1). С помощью аналогичных преобразований можно получить связь случайных величин $\eta$, имеющих другие законы распределения, с равномерно распределённой случайной величиной $\xi$ на интервале [0,1).

2. Равномерное распределение на интервале [a,b)

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x < b \\ 0, & \text{если } x < a \;\&\; x \geq b. \end{cases}$$

$$\eta = (b-a)\,\xi + a. \tag{1.3}$$

3. Распределения Рэлея

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

математическое ожидание и дисперсия

$$m_1\{\eta\} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad D\{\eta\} = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2.$$

$$\eta = \sigma\sqrt{-2\,ln(\xi n)}. \tag{1.4}$$

4. Распределение арксинуса

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi b \sqrt{1-\left(\dfrac{x-a}{b}\right)^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

$$m_1\{\eta\} = a, \qquad \sigma_\eta = \frac{b^2}{a}.$$

$$\eta = b \sin\left[\pi\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\right] + a. \tag{1.5}$$

Относительно простые преобразования (1.2 – 1.5) существуют далеко не для всех распределений. В связи с этим широко применяется приём, когда выполняется замена непрерывной случайной величины на дискретную величину с различными способами аппроксимации.

## 1.2. Метод ступенчатой аппроксимации

Дифференциальная функция распределения $f_\eta(x)$ непрерывной случайной величины $\eta$ в методе ступенчатой аппроксимации изображается графически на интервале [a; b] (рис. 1.1). Если $\eta$ задана на бесконечном интервале, то выполняют его усечение с заданной точностью.

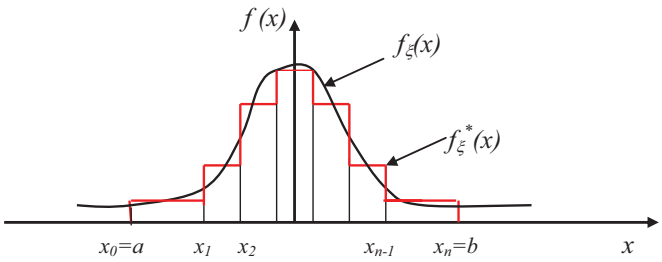



**Рис. 1.1**. Ступенчатая аппроксимация функции распределения

Конечный интервал [a; b] разбивается на $n$ подинтервалов с равновероятным $1 \setminus n$ попаданием $\eta$ в подинтервал, т.е. должно выполняться соотношение:

$$P(x_{i-1} < \eta \le x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_\eta(x)\,dx = \frac{1}{n} = const,$$

где $x_i$ – координаты граничных точек подинтервалов, $i \in \{1,2,...,n\}$, $x_0=a$, $x_n=b$

Выполним аппроксимацию дифференциальной функции распределения $f_\eta(x)$ ступенчатой линией. При этом необходимо, чтобы значения $f_\eta(x)$ были постоянными в каждом подинтервале и равнялись среднему значению $f_\eta(x)$ в своём подинтервале. После этого ступенчатая линия представляет собой совокупность функций распределения с равномерным законом распределения на своём подинтервале. В этом случае для случайной точки в $i$-м подинтервале $(x_{i-1}, x_i)$ её координата $x$ будет равна $x=x_{i-1}+c_i$. Значение $c_i$ определяет расстояние от левой границы подинтервала $(x_{i-1}, x_i)$ до координаты $x$.

Алгоритм генерации случайной величины $\eta$ с заданной дифференциальной функцией распределения состоит из следующих шагов.

1. Вычисляется таблица координат границ подинтервалов (табл.1.1).

*Таблица 1.1*

**Таблица координат границ подинтервалов**

| Координаты границ подинтервалов | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Значения координат границ подинтервалов | $a$ | | | | | $b$ |

Вторую строчку таблицы получают, решая интегральное уравнение

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f_\eta(x)dx = \frac{1}{n},\ i \in \{1,2,...,n\}.$$

2. Присваиваем $k=1$, где $k$ – номер генерируемого значения случайной величины.

3. Генерируется значение $\xi$ равномерно распределённой на интервале [0,1) случайной величины.

4. Определяем номер подинтервала $j$, который является целой, равномерно распределённой на интервале $[1; n]$, $j=[n\xi]+1$ случайной величиной. Квадратные скобки в $[n\xi]$ указывают на целую часть $n\xi$.

5. Вычисляем длину $j$-го подинтервала $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

6. Генерируем новое значение равномерно распределённой в интервале [0,1) случайной величины.

7. Вычисляем расстояние $c_j=\xi\Delta x_j$ от левой границы $j$-го подинтервала до координаты точки $x$.

8. Вычисляем $k$-е значение случайной величины $\eta = x_{j-1}+c_j$.

9. Увеличиваем $k=k+1$ и выполняем проверку, если $k\leq N$, то переходим на п. 3 ($N$ – заданное количество значений случайной величины), иначе переходим на п. 10.

10. Конец.

## 1.3. Метод композиции

При реализации метода композиции необходимо обеспечить условия справедливости предельной теоремы теории вероятностей. Этот метод можно успешно использовать для получения непрерывных случайных величин как с распределением Гаусса (нормальный закон распределения), так и по распределению Симпсона – Эрланга и некоторым другими законам.

При получении значений случайной величины с распределением Гаусса используют условия центральной предельной теоремы и свойство сходимости суммы независимых случайных величин к закону Гаусса. Для получения последовательности из $N$ значений случайной величины $\eta$ с $m_\eta=0$ и $\sigma_\eta=1$, с распределением Гаусса, можно воспользоваться следующим алгоритмом.

1. $J=1$.

2. Генерируется $n$ независимых значений случайной величины равномерно распределённой в интервале [-1, 1]. При этом каждое значение определяется следующим образом:

$z_i=2\xi_i-1$, где $\xi_i$ – $i$-е значение равномерно распределённое случайной величины на интервале [0,1), $i\in\{1,2,...,n\}$.

3. Формируется $j$-е значение случайной величины $y$ с распределением Гаусса с математическим ожиданием $m_1\{y\}=0$ и дисперсией $D\{y\}=n\backslash 3$.

4. $y_i = \sum_{i=1}^{n} z_i$;

5. Для обеспечения распределения Гаусса случайной величины с $m_1\{\eta\}=0$ и $\sigma\{\eta\}=1$ надо выполнить нормализацию значения случайной величины $y$.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**ПРЕДИСЛОВИЕ**…….…….. 3

**1. ИМИТАЦИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ….....…** 5

1.1. Метод обратной функции…….. 5

1.2. Метод ступенчатой аппроксимации…….…… 7

1.3. Метод композиции…….…… 9

Вопросы для самоконтроля……..……. 10

**2. ФИКСАЦИЯ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАИЯ……..…….. 12**

2.1. Статистические оценки основных вероятностных характеристик случайных величин…….…… 12

2.2. Минимальный объём выборки и достоверность точности статистических оценок вероятностных характеристик…….…. 14

Вопросы для самоконтроля……...…. 19

**3. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ…….** 18

3.1. Вводные замечания……...…… 18

3.2. Потоки событий…… 22

3.3. Простейший поток событий……. 23

3.4. Общая характеристика систем массового обслуживания……. 24

3.5. Элементарный акт обслуживания заявки……... 26

3.6. Структуры, внутренние параметры и виды СМО……..…… 27

3.7. Описание функционирования СМО…… 28

3.8. Обозначения и классификация СМО……..…… 30

3.9. Показатели эффективности и основные характеристики СМО 31

3.10. Общие принципы моделирования СМО……..……. 33

3.10.1. Этапы моделирования функционирования СМО методом статистических испытаний……..... 33

3.10.2. Генерация входных потоков……..……. 34

3.10.3. Модель функционирования элементарных СМО…… 34
3.10.4. Модель СМО с ожиданием…….. 36
3.10.5. Модель СМО без ожидания…… 38
3.10.6. Блочный принцип построения модели функционирования системы……. 39
3.10.7. Особенности моделирования с использованием Q-схем…….. 40
Вопросы для самоконтроля……... 43
**4. МНОГОРЕСУРСНЫЕ МОДЕЛИ САПР**……. 45
4.1. САПР как многоресурсная система……. 45
4.1.1. Особенности моделирования САПР……. 45
4.1.2. Формализация взаимодействия компонентов САПР…….. 46
4.1.3. Декомпозиция в анализе многоуровневых моделей…….. 49
4.2. Стохастические сети……..….. 50
4.3. Смешанные сети……..…. 55
4.4. Итеративные методы анализа стохастической сети…….…… 57
4.5. Многоуровневые модели……..… 58
4.5.1. Классификация многоуровневых моделей……..…. 59
4.5.2. Формализованное описание многоуровневых моделей……. 59
4.6. Моделирование производительности САПР……..…… 61
4.7. Моделирование надёжности программно-технических систем…..... 68
Вопросы для самоконтроля……..……. 76
**5. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**…… 78
**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**……....…..…… 83
**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**……...……. 85