

Л. А. Гладков, Н. В. Гладкова
В. В. Курейчик, В. М. Курейчик

Специальные разделы теории графов

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЮФУ
РОСТОВ-НА-ДОНУ–ТАГАНРОГ

УДК 519.14(075.8)
ББК 22.174.1я73
Г522

Печатается по решению кафедры систем автоматизированного проектирования Института компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета (протокол №5 от 27 января 2017 г.)

Рецензенты:
зав. кафедрой компьютерных образовательных технологий Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор *Л. С. Лисицина*

кандидат технических наук, доцент кафедры САУ ЮФУ *А. Я. Номерчук*

Гладков, Л. А.

Г522 Специальные разделы теории графов : учебное пособие / Л. А. Гладков, Н. В. Гладкова, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2018. – 111 с.

ISBN 978-5-9275-2779-3

Рассмотрены основные положения специальных разделов теории графов, таких как изоморфизм, паросочетания, планарность и минимизация пересечений. Приведены основные определения и элементы теории, а также рассмотрены примеры их практического решения. Для проверки уровня освоения материала приведены вопросы и задания для самостоятельной работы учащихся. Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы». Пособие может быть полезным для специалистов, занятых разработкой интеллектуальных систем, новых информационных технологий в науке, технике, экономике.

УДК 519.14(075.8)
ББК 22.174.1я73

ISBN 978-5-9275-2779-3

© Южный федеральный университет, 2018
© Гладков Л. А., Гладкова Н. В., Курейчик В. В., Курейчик В. М., 2018
© Оформление. Макет. Издательство Южного федерального университета, 2018

1. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ

Многие задачи информатики сводятся к различным тождественным преобразованиям математических моделей заданных в виде графов. Тождественные преобразования графов, сводимые только к переобозначению вершин и ребер, приводят к получению **изоморфных графов** [1–18].

Большое число комбинаторно-логических и оптимизационных задач на требует установления **изоморфизма** или изоморфного вложения между заданными структурами. Эта задача, как и многие другие графовые задачи, является NP-полной. Поэтому разрабатываются различные эвристики для получения приемлемых практических результатов [1–4, 11–18].

Два графа $G_1 = (X_1, U_1)$ и $G_2 = (X_2, U_2)$ называются изоморфными, если можно установить взаимно однозначное соответствие отображение φ: $X_1 \to X_2$ такое, что ребро $u = (x, y) \in U_1$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(x), \varphi(y)) \in U_2$. Соответственно для того, чтобы ответить на вопрос: возможно ли установить такое отображение, необходимо решить **задачу распознавания изоморфизма графов** (РИГ) [1, 2, 11–18].

В настоящее время известны **полиномиальные алгоритмы** для следующих классов графов: графы ограниченной степени; графы с ограниченной кратностью собственных значений; k – разделимые графы; k – стягиваемые графы и т.д.

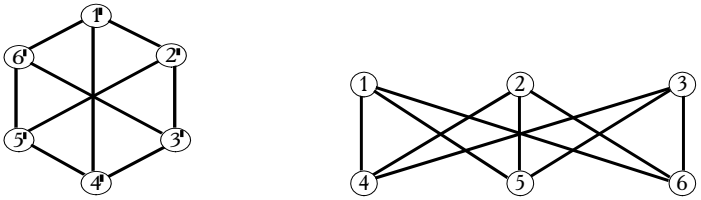
Изоморфные графы могут быть получены один из другого путем перенумерации их вершин. Очевидно, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах. Графы G и G', изображенные на рис. 1 и 2, изоморфны. Подстановка

$$t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x'_1 & x'_3 & x'_5 & x'_2 & x'_4 & x'_6 \end{pmatrix}$$

переводит граф G в G'.

Для перехода от графа G' к графу G необходимо применить обратную подстановку t^{-1} к графу G:

$$t^{-1} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 & x'_5 & x'_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_1 & x_4 & x_2 & x_5 & x_3 & x_6 \end{pmatrix}.$$



а) б)

Рис. 1. Пример изоморфной подстановки

Если изоморфные преобразования проводятся с графом, заданным матрицей смежности, то они сводятся к перестановке местами соответствующих строк и столбцов. Известно, что, в общем, для определения изоморфизма графов необходимо сделать $n!$ сравнений или перестановок строк и столбцов матрицы, что для графов с $n > 30$ невозможно даже с учетом возможностей современных ЭВМ. В этой связи разрабатываются эвристические алгоритмы, осуществляющие не полный перебор, а поиск по дереву решений.

Известно, что эвристика (эвристический алгоритм) – это эмпирическое правило, стратегия или метод, использующийся без доказательств эффективности решения, применяющийся для решения экспоненциальных и полиномиальных задач с ВСА больше чем $O(n^4)$.

Например, матрица смежности графа G (рис. 1 а) имеет вид:

$$R' = \begin{array}{c|cccccc} & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \\ \hline 1' & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2' & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3' & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4' & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5' & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6' & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

а матрица смежности R' графа G' (рис. 1 б) запишется

$$R = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Если к матрице R применить подстановку t^{-1}, то получим матрицу

$$R_t = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Особого внимания заслуживают **сильнорегулярные графы** (СГ). Граф $G = (X, \rho, n^1_{11}, n^0_{11})$, $|X| = n$ называется n – вершинным регулярным графом степени ρ, если в нем любая пара смежных вершин имеет n^1_{11} общих соседей, а любая пара несмежных вершин – n^0_{11}. Известно, что СГ образуют класс наиболее трудных задач для РИГ.

Задача изоморфного вложения графа является **NP- полной задачей**. Она имеет много сходства и в то же время существенно (по сложности) отличается от РИГ. Например, для решения задачи изоморфизма подграфа G_1 с использованием известных алгоритмов РИГ необходимо разработать процедуру выделения в графе G подмножества $X_1 \subset X$ равномощного с множеством вершин X_2 графа G_2.

Данная процедура включает k_1 действий, где, $n = |X|$, $n_2 = |X_2|$. Следовательно, k_1 раз надо применять и алгоритм РИГ: $k_1 = \binom{n}{n_2}$.

Поэтому при выделении каждого подграфа G_1 в графе G необходимо выполнять k_2 действий:

$$k_2 = \binom{m_1}{m_2},$$

где m_1 - количество ребер в подграфе G_1, m_2 - в графе G_2, $m_1 > m_2$.

Следовательно, даже если есть полиномиальный алгоритм РИГ, с его помощью невозможно решить **задачу изоморфного вложения** за полиномиальное время. Она может быть решена за полиномиальное время, если G_1 – лес, а G_2 – дерево.

Наибольшую трудоемкость представляет **установление изоморфизма однородных графов, имеющих автоморфные подграфы**. Для решения таких задач используются **методы разбиения исследуемых графов на**

различные уровни. При этом ВСА алгоритма снижается с O(n!) до O(k!), где n – число элементов в графе, а k – число элементов в наибольшем автоморфном подграфе, т.е. в таком подграфе, где не имеет значения выбор вершин для установления соответствия.

Основная идея таких алгоритмов заключается в следующем. В графах, исследуемых на изоморфизм, выбираются две предполагаемо изоморфные вершины. Относительно них производится разбиение всех оставшихся вершин на два класса. В первый класс включаются вершины, смежные предполагаемо изоморфным, а во второй нет.

Покажем на примере реализацию эвристики разбиения для установления изоморфизма однородных графов.

Пример 1. Рассмотрим два графа G и G'. $G = (X, U)$, $G' = (X', U')$, $|X| = |X'| = 6$, $|U| = |U'| = 9$, локальные степени всех вершин графа равны трем (рис. 1 а, б).

Необходимо установить изоморфизм графов G и G'. Другими словами, необходимо определить, существует ли отношение эквивалентности $X \Leftrightarrow X'$, $U \Leftrightarrow U'$ такое, что, если ребро $(x_i, x_j) \Leftrightarrow$ ребру (x_i', x_j'), тогда $x_i \Leftrightarrow x_i'$, $x_j \Leftrightarrow x_j'$, $x_i, x_j, \in X$, $x_i', x_j', \in X'$.

$R_G =$

	1	2	3	4	5	6	
1	0	1		1		1	3
2	1	0	1		1		3
3		1	0	1		1	3
4	1		1	0	1		3
5		1		1	0	1	3
6	1		1		1	0	3

$R_G{}^1 =$

	X_1^1	X_2^1	X_3^1	X_4^1	X_5^1	X_6^1	
X_1^1	o			1	1	1	3
X_2^1		0		1	1	1	3
X_3^1			0	1	1	1	3
X_4^1	1	1	1	0			3
X_5^1	1	1	1		0		3
X_6^1	1	1	1			0	3

Выберем одну вершину в графе G и одну в графе G'. И относительно них выполним указанное выше разбиение:

$\{x_1\}$ $\{x_2, x_4, x_6\}_{1+}$ $\{x_3, x_5\}_{1-}$ (G),
$\{x_1'\}$ $\{x_4', x_5', x_6'\}_{1'+}$ $\{x_2', x_3'\}_{1'-}$ (G').

В данном разбиении вершины x_2, x_4, x_6 смежны вершине x_1, а вершины x_3, x_5 не смежны вершине x_1 графа G. Аналогичное разбиение выполнено для графа G'. Здесь считается, что вершины x_1 и x_1' предполагаемо изоморфны (П-изоморфны). Далее, выбираются подмножества меньшей мощности и внутри них проверяется смежность вершин. В нашем примере вершины x_3, x_5 и x_2', x_3' не смежны. Поэтому процесс разбиения продолжается.

$\{x_1\}$ $\{x_3\}_{1-}$ $\{\{x_2, x_4, x_6\}_{3+}\}_{1+}$ $\{\{x_5\}_{3-}\}_{1-}$,
$\{x_1'\}$ $\{x_2'\}_{1'-}$ $\{\{x_4', x_5', x_6'\}_{2'+}\}_{1'+}$ $\{\{x_3'\}_{2'-}\}_{1'-}$

Продолжая процесс аналогично, получим, что граф G изоморфен графу G'. Подстановка вершин запишется

$$t = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 4' & 2' & 5' & 3' & 6' \end{Bmatrix}$$

В рассматриваемом примере подмножества вершин $\{x_2, x_4, x_6\}$ и $\{x_4', x_5', x_6'\}$ являются автоморфными, т.е. каждая вершина в одном подграфе может быть изоморфна любой вершине второго подграфа.

G' преобразовали в G на основе подстановки

$R_{G\Pi} =$

	1’	2’	3’	4’	5’	6’	
1(1’)	0	1		1		1	3
2(4’)	1	0	1		1		3
3(2’)		1	0	1		1	3
4(5’)	1		1	0	1		3
5(3’)		1		1	0	1	3
6(6’)	1		1		1	0	3

Следовательно, G' изоморфен G.

В алгоритмах такого типа необходим перебор между элементами автоморфных подграфов. Причем, как следует из рассмотрения примера, такой перебор здесь выполняется последовательно для всех вершин, кроме последней в подграфе.

Пример 2. На рис. 2 показаны нетривиальные, неоднородные графы G и G'. В этих графах $|X| = |X'| = 7$, $|U| = |U'| = 8$, $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$, $\rho_3 = 3$, $\rho_4 = 3$, $\rho_5 = 3$, $\rho_6 = 2$, $\rho_7 = 1$; $\rho_a = 1$, $\rho_b = 3$, $\rho_c = 3$, $\rho_d = 3$, $\rho_e = 3$, $\rho_f = 2$, $\rho_g = 1$. Вершина 1 может быть П–изоморфна вершине a или g. В первом случае

нас ждет тупик, а во втором успех. Мы предположили, что вершина 1 П-изоморфна вершине *g*. Тогда на основе связности графа и эвристики разбиения следует, что вершина 7 П-изоморфна вершине *a*. Из этого вытекает, что вершина 6 П-изоморфна вершине *f*.

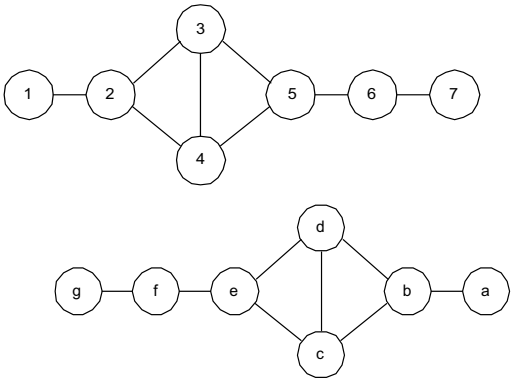


Рис. 2. Нетривиальные графы *G* и *G′*

$R_G =$

	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	1						1
2	1	0	1	1				3
3		1	0	1	1			3
4		1	1	0	1			3
5			1	1	0	1		3
6					1	0	1	2
7						1	0	1

$R_{G'} =$

	a	b	c	d	e	f	g	
a	0	1						1
b	1	0	1	1				3
c		1	0	1	1			3
d		1	1	0	1			3
e			1	1	0	1		3
f					1	0	1	2
g						1	0	1

Далее необходимо установить существует ли соответствие между подмножествами автоморфных вершин {2, 3, 4, 5} и {*b*, *c*, *d*, *e*}. В этом случае, как отмечалось выше, в общем, необходимо выполнить полный перебор между этими подмножествами вершин. В данном примере это – 4!

Выполняя такие преобразования, получим, что вершина 2 П-изоморфна вершине *b*, вершина 3 П-изоморфна вершине *d*, 4 – *c* и 5 – *e*. Отсюда следует, что графы *G* и *G′* (рис. 2) изоморфны, а подстановка изоморфизма, переводящая один граф G в граф *G′*, запишется

$$t = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & d & c & e & f & g \end{Bmatrix}$$

Следовательно, *G* - изоморфен *G′*.

Как видно, наличие вершин с различными локальными степенями упрощает процесс РИГ. Это позволяет выбирать начальные условия для эвристики разбиения. В примере (рис. 2) всего два способа для выбора разбиения, в то время, как в графах (рис. 1) шесть возможных способов разбиения. В однородных графах все степени вершин одинаковы, поэтому начальные условия выбираются произвольно случайным образом.

В этой связи при установлении изоморфизма в однородных графах ВСА в самом лучшем случае O(*n*), в самом худшем случае O(*n*!). Если графы неизоморфны, то за одну итерацию установить результат невозможно. Необходимо провести сравнение на изоморфизм одной случайно выбранной вершины из одного графа со всеми остальными вершинами другого графа.

Пример 3. Пусть заданы два графа (рис. 3) *G* и *G′*. При этом $G = (X, U)$, $G' = (X', U')$, $|X| = |X'| = 6$, $|U| = |U'| = 9$, локальные степени всех вершин графа равны трем.

Для РИГ применим **эвристику разбиения**. Предположим, что вершина 1 графа *G* П-изоморфна вершине *a* графа *G′*. Тогда получим:

$\{1\}$ $\{2, 4, 6\}_{1+}$ $\{3, 5\}_{1-}$ (G),
$\{a\}$ $\{b, d, f\}_{1'+}$ $\{e, c\}_{1'}$ (G').

Для дальнейшего анализа выбираем соответствующие подмножества наименьшей мощности {3, 5} и {*e*, *c*}. Вершины (3, 5) в графе *G* смежны, а вершины (*c*, *e*) в графе *G′* – нет. Следовательно, вершина 1 не может быть изоморфна вершине *a*. В этой связи необходимо провести аналогичные

операции для проверки изоморфизма вершины 1 с остальными вершинами графа G'. Далее получим:

$\{1\}$ $\{2, 4, 6\}_{1+}$ $\{3, 5\}_{1-}$ (G),
$\{b\}$ $\{a, c, e\}_{1'+}$ $\{d, f\}_{1'-}$ (G').

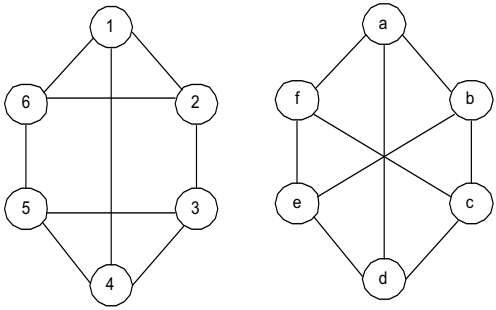


Рис. 3. Графы G и G'

Вершины (3, 5) в графе G смежны, а вершины (d, f) в графе G' – нет. Следовательно, вершина 1 не может быть изоморфна вершине b. Продолжая аналогичные построения, имеем, что вершина 1 не может быть изоморфна вершинам c, d, e. Наконец, предположим, что вершина 1 графа G П-изоморфна вершине f графа G'. Тогда получим:

$\{1\}$ $\{2, 4, 6\}_{1+}$ $\{3, 5\}_{1-}$ (G),
$\{f\}$ $\{a, c, e\}_{1'+}$ $\{b, d\}_{1'-}$ (G').

Вершины (3, 5) в графе G смежны, а вершины (b, d) в графе G' – нет. Следовательно, вершина 1 не может быть изоморфна вершине b. Проанализированы все вершины графа G' на предмет изоморфизма с вершиной 1 графа G. Во всех случаях ответ отрицательный. Поэтому граф G неизоморфен графу G'.

Пример 4. Рассмотрим пример работы алгоритма распознавания изоморфизма для графов G и G' (рис. 4). $G = (X, U)$, $G' = (X', U')$, $|X| = |X'| = 10$, $|U| = |U'| = 15$, локальные степени всех вершин графа равны трем. Предположим, что вершина 1 графа G П-изоморфна вершине a графа G'. Тогда получим:

$\{1\}$ $\{2, 5, 6\}_{1+}$ $\{3, 4, 7, 8, 9, 10\}_{1-}$ (G),
$\{a\}$ $\{b, e, f\}_{1'+}$ $\{c, d, h, g, k, i\}_{1'-}$ (G').

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ИЗОМОРФИЗМ ГРАФОВ 4
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ....17
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ К РАЗДЕЛУ 1 21
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ 1 23
2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРОСОЧЕТАНИЙ В ГРАФЕ 25
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ....42
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ К РАЗДЕЛУ 2 54
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛУ 2 57
3. ПЛАНАРНОСТЬ ГРАФОВ....60
3.1. Плоские и планарные графы....60
3.2. Эвристики для определения планарности....67
3.3. Матричные алгоритмы определения планарности. Алгоритм Данна-Чена 71
3.4. Циклические алгоритмы определения планарности....75
4. МИНИМИЗАЦИЯ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ГРАФОВ....83
ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ К РАЗДЕЛАМ 3 И 4....90
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ К РАЗДЕЛАМ 3 И 4 92
ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ИЗУЧАЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ 95
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 109