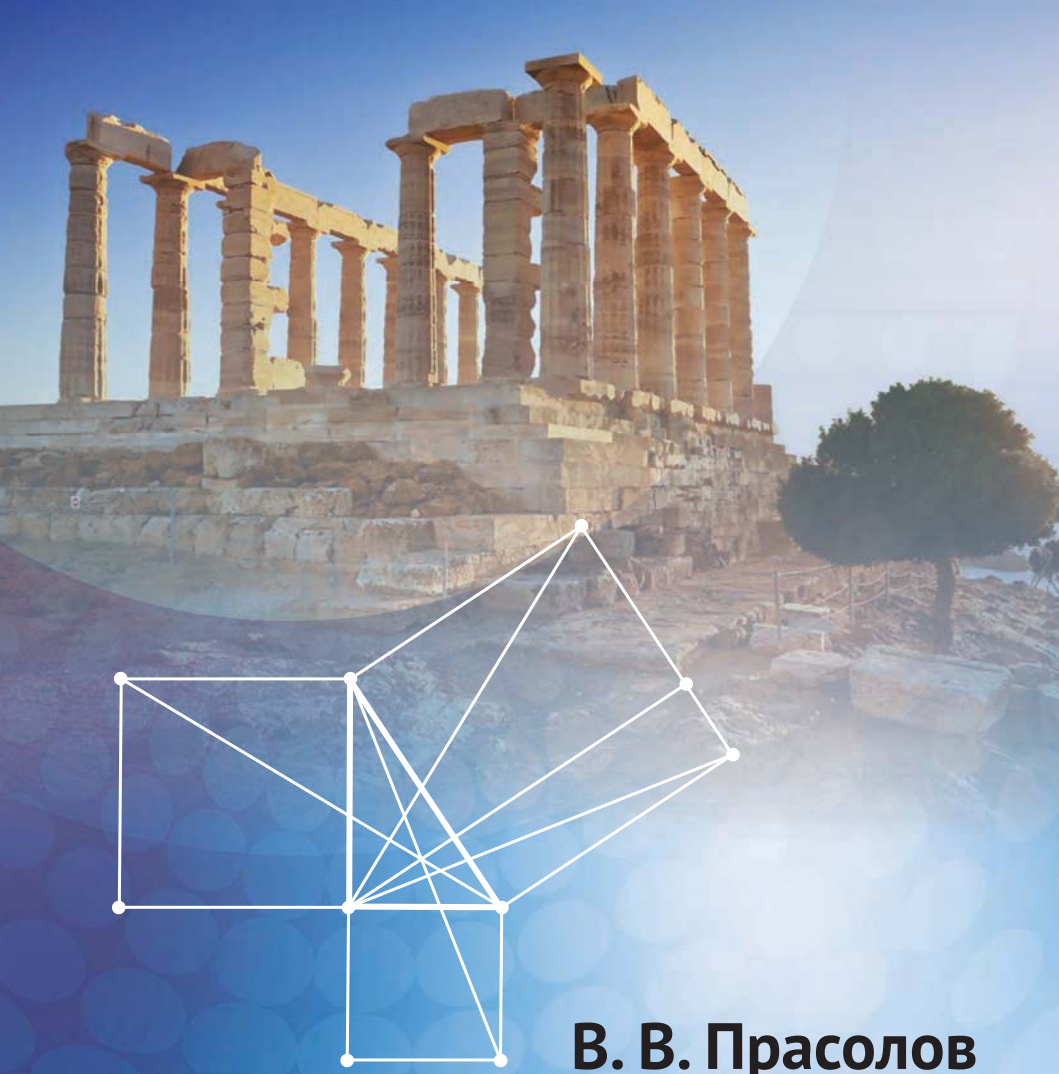


В. В. Прасолов

История математики

Часть 1

УДК 51(091)
ББК 22.1г
П70

Прасолов В. В.
История математики. Часть 1.
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2018
292 с.
ISBN 978-5-4439-3276-7

Первая часть книги «История математики» посвящена периоду до конца XVII века. В ней сначала рассказывается об истории математики Древнего Египта, Вавилона, Древней Греции, Китая, Индии и арабских стран. Затем действие переносится в Западную Европу, и за кратким обзором Средних веков и Возрождения следует подробный рассказ о математике XVII века.

Для школьников, студентов и преподавателей — математиков и физиков, а также для всех интересующихся историей науки.

Подготовлено на основе книги: *В. В. Прасолов*. История математики. Часть 1. — М.: МЦНМО, 2018. — ISBN 978-5-4439-1276-9.

12+

Научное издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3276-7

© Прасолов В. В., 2018.
© МЦНМО, 2018.

Оглавление

Предисловие 5

Глава 1. Древний Египет и Вавилон

Древний Египет 6

Древнегреческие свидетельства о египетской математике (7). Характер египетской математики (8). Египетские дроби (9). Вычисления «аха» (9). Вычисление площадей (10). Египетский треугольник (11). Задача Московского папируса (12). Объём усечённой пирамиды (14). Архитектура (15).

Вавилон 18

Одна вавилонская задача (19). Квадратные уравнения (21). Несколько задач с площадями (22). Задачи с площадями и решение уравнений в целых числах (26). Прямоугольные треугольники (28). Табличка 322 Плимптона (30). Окружность (31). Объём усечённой пирамиды (32). Арифметические и геометрические прогрессии (35). Заключение (35).

Глава 2. Древняя Греция

Фалес Милетский (37). Пифагор (38). Зенон (43). Три классические задачи на построение (47). Гиппократ Хиосский (55). Феодор Киренский (60). Архит Тарентский (62). Платон (65). Теэтет Афинский (67). Евдокс Книдский (67). Динострат (70). Аристотель (76). Менехм (77). Евклид (79). Аристарх Самосский (98). Архимед (98). Никомед (119). Эратосфен Киренский (123). Аполлоний Пергский (125). Зенодор (131). Гипсикл Александрийский (131). Герон Александрийский (132). Менелай Александрийский (136). Клавдий Птолемей (136). Диофант Александрийский (137). Папп Александрийский (139).

Глава 3. Китай. Индия. Арабские страны

Китай 152

«Математика в девяти книгах» (152). Дроби (153). Площади (153). Извлечение квадратных и кубических корней (154). Объёмы (154). Системы линейных уравнений (157). Теорема Пифагора и пифагоровы тройки (158). Две задачи о прямоугольных треугольниках (164). Вычисление расстояний до недоступных объектов (165). Вычисление π (168). Биномиальные коэффициенты (169). Китайская теорема об остатках (169). Численное решение кубических уравнений (170). Вычисление сумм (170). Интерполяция (170). Метод Руффини — Горнера (170).

Индия 171

Построение алтарей (172). Построение квадрата (173). Теорема Пифагора (175). Пифагоровы треугольники (177). Площадь круга (179). Построение квадрата, равновеликого прямоугольнику (182). Математика раннего джайнизма (183). Ариабхата (186). Варахамихира (186). Брахмагупта (186). Махавира (188). Сридхара (188). Бхаскара II (188). Мадхава из Сангамаграмы (189). Нилаканта Сомаяджи (189).

Арабские страны 190

Хабаш аль-Хасиб аль-Марвази (190). Мухаммад аль-Хорезми (190). Аль-Джаухари (192). Сабит ибн Корра (192). Абу Камил (193). Аль-Баттани (195). Ан-Найризи (195). Аль-Хазин (196). Абу-ль-Вафа (196). Аль-Кухи (196). Ибн Юнус аль-Мисри (196). Аль-Караджи (197). Ибн аль-Хайсам (198). Аль-Бируни (200). Омар Хайям (201). Ибн Яхья аль-Магриби аль-Самавал (203). Шараф ад-Дин ат-Туси (203). Насир ад-Дин ат-Туси (204). Джемшид аль-Каши (205). Аль-Каласади (206).

Глава 4. Средние века и Возрождение

Византия 207

Средневековая Европа 207

Герберт Аврилакский (208). Фибоначчи (208). Томас Брадвардин (209). Ричард Суайнсхед (210). Николя Орем (211).

Возрождение 211

Регионтан (211). Теория перспективы (212). Лука Пачоли (212). Шюке (213). Леонардо да Винчи (213). Коссисты (213). Штифель (214). Коперник (214). Решение кубического уравнения (214). Герард Меркатор (216). Бомбелли (216). Виет (217). Стевин (218).

Глава 5. XVII век

Логарифмы (220). Гарриот (222). Галилей (222). Кеплер (223). Гульдин (225). Фаульгабер (226). Де Сен-Венсан (226). Дезарг (227). Жирар (228). Декарт (229). Кавальери (234). Ферма (235). Роберваль (239). Торричелли (241). Ван Схоотен (242). Валлис (242). Браункер (244). Николаус Меркатор (246). Вивиани (246). Паскаль (247). Кассини (249). Гудде (250). Гюйгенс (250). Барроу (251). Рен (252). Нейль (252). Грегори (253). Мор (253). Де Ла Гир (254). Секи Кова (254). Ньютон (255). Лейбниц (261). Чева (270). Чирнгауз (270). Ролль (271). Якоб Бернулли (271). Вариньон (273). Лопиталь (274). Иоганн Бернулли (274).

Предметный указатель 280

Указатель имён 287

Глава 1

Древний Египет и Вавилон

Древний Египет

Возникновению математики предшествовало возникновение понятия числа и формирование системы записи чисел. До появления математики должны были также сформироваться представления об основных геометрических фигурах. Рисунки могли появиться только тогда, когда возникло представление о подобии фигур. Некоторые египетские рисунки показывают, что для изображения подобных фигур использовались квадратные сетки. Уже на первых рисунках встречаются попытки изображения перпендикулярных и параллельных прямых. В орнаментах часто встречаются шестиугольники. Но пятиугольники и десятиугольники на рисунках в Древнем Египте не встречаются.

В Египте хранили, передавали и развивали научные знания, в том числе и математические, так называемые писцы. Должность писца была очень почётной. В одном тексте читаем: «Писец руководит всеми, и не обложена налогами работа в письме. На неё нет налогов». В другом тексте о писцах говорится: «Это больше, чем любая должность, и нет ничего равного им в этой стране».

Египетские тексты записаны на хрупком папирусе, иногда на коже. Такие тексты сохранялись гораздо хуже и реже, чем вавилонские тексты, которые писались клинописью на сырой глине, а затем обжигались. До нашего времени сохранилось огромное число вавилонских математических клинописных текстов, а египетских математических папирусов сохранилось очень мало.

Самый большой из сохранившихся до наших дней математический папирус — это папирус Райнда, названный по имени владельца, который приобрёл его в 1858 г. Папирус Райнда составлен писцом Ахмесом (1680—1620 до н. э.); он содержит 84 задачи. Другой большой математический папирус — так называемый Московский папирус, хранящийся в Музее изобразительных искусств имени А. С. Пушкина. Он содержит 25 задач. Оба эти математических па-

пируса составлены для учебных целей и переписаны с оригиналов, восходящих примерно к 1900 году до н. э.

Папирус Райнда начинается обещанием научить «совершенному и основательному исследованию всех вещей, пониманию их сущности, познанию всех тайн…». А в действительности речь идёт только о тайнах счёта и о вычислениях с дробями.

Древнегреческие свидетельства о египетской математике

Древние греки считали Египет страной, в которой зародились почти все науки. При этом причины возникновения математики назывались едва ли не противоположные. Прокл в «Комментарии к первой книге „Начал“ Евклида» писал: «Как у финикийцев начало точному знанию чисел было положено благодаря торговле и сделкам, так и у египтян геометрия была изобретена по указанной причине. Съездив в Египет, Фалес впервые перенёс эту науку в Элладу…» Подробно обосновывал происхождение геометрии (точнее сказать, землемерия) практическими потребностями Геродот: «Этот царь (Сесострис), как передавали жрецы, также разделил землю между всеми жителями и дал каждому по квадратному участку равной величины. От этого царь стал получать доход, повелев взимать ежегодную поземельную подать. Если река отрывала у когонибудь часть его участка, то владелец мог прийти и объявить царю о случившемся. А царь посылал людей удостовериться в этом и измерить, насколько уменьшился участок, для того чтобы владелец уплачивал подать соразмерно величине оставшегося надела. Мне думается, что при этом-то и было изобретено землемерное искусство и затем перенесено в Элладу» («История», книга II). Аристотель же не считал практические потребности сколько-нибудь важными для возникновения математики. В книге «Метафизика» он писал: «…математические искусства были созданы прежде всего в Египте, ибо там было предоставлено жрецам время для досуга».

Изобретение математики приписывали иногда египетскому богу Тоту. В диалоге Платона «Федр» Сократ говорит: «Так вот, я слышал, что близ египетского Навкратиса родился один из древних тамошних богов, которому посвящена птица, называемая ибисом. А самому божеству имя было Тевт. Он первый изобрёл число, счёт, геометрию, астрономию, вдобавок игру в шашки и в кости, а также и письмена».

Очень важным свидетельством являются слова Демокрита: «Никто не превзошёл меня в складывании линий, сопровождающемся

доказательством, — даже так называемые гарпедонапты у египтян». Это едва ли не единственное прямое указание на то, что в египетской геометрии были доказательства. Косвенным указанием являются, например, слова Прокла о том, что Фалес впервые перенёс геометрию из Египта в Элладу. Для греков геометрия подразумевала доказательства.

Характер египетской математики

В египетских математических папирусах много задач, возникающих из практики. Они связаны с распределением заработной платы между известным числом рабочих, вычислением необходимого количества зерна для приготовления заданного количества хлеба или пива, переводом одних мер в другие. Основное внимание уделяется не методам решения задач, а самим вычислениям.

Эти задачи имели большое значение для писцов, управлявших многими важными делами в Египте. Об этом свидетельствует один очень интересный текст папируса, в котором писец упрекает другого писца в математическом невежестве: «Я хочу объяснить тебе, что это такое, когда ты говоришь: „Я писец, дающий приказы армии“. Тебе поручено выкопать озеро. Ты приходишь ко мне, спрашиваешь о запасах для солдат и говоришь: „Сосчитай мне это“. Ты оставляешь свою работу, и на мои плечи сваливается задача — учить тебя, как её надо выполнить. Я ставлю тебя в тупик, когда приношу тебе повеление от твоего господина, тебе — его царскому писцу... мудрому писцу, поставленному во главе этого войска. Должно сделать насыпь для подъёма в 730 локтей длины и 55 локтей ширины; она состоит из 120 отдельных ящиков и покрывается перекладинами и тростником. На верхнем конце она имеет высоту в 60 локтей, а в середине 30 локтей; уклон её — дважды по 15 локтей, а настил — 5 локтей. Спрашивают у военачальников, сколько понадобится кирпичей, и у всех писцов, и ни один ничего не знает. Все они надеются на тебя и говорят: „Ты искусный писец, мой друг, сосчитай это для нас поскорей. Смотри, имя твоё славится. Сколько же надо для этого кирпичей?“»[1].

Для развлечения изучающих математику приводились и задачи, явно возникшие не из практики. Вот одна из наиболее известных таких задач: «Есть 7 домов, и в каждом живёт по 7 кошек. Каждая кошка съела 7 мышей, каждая мышь съела 7 колосьев ячменя. Каж-

[1]Цитируется по [7, с. 20].

дый колос мог дать 7 мер хлеба. Найти сумму домов, кошек, мышей, колосьев и мер». В ответе получается 19 607.

Египетские дроби

Деление $m : n$ египтяне иногда представляли как умножение m на аликвотную дробь $1/n$. Других дробей египтяне не рассматривали, за исключением дробей $2/3$ и $3/4$ (и иногда дробей $2/n$). Эти дроби, как и дроби $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/6$ и $1/8$, часто встречались на практике, а потому имели специальные названия.

Папирус Райнда начинается с таблицы представления дробей $2/n$ для n от 3 до 101 в виде сумм аликвотных дробей. Например, $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

Использование только аликвотных дробей — характерная особенность египетской математики. Обычно достаточно скоро возникали дроби общего вида и развитие математики не останавливалось на аликвотных дробях.

Вычисления «аха»

Египетское слово «аха» означает «куча», «груда», «количество». Количество здесь — неизвестная величина, которую нужно найти. Вычисление «аха» приблизительно соответствует нашим уравнениям первой степени с одним неизвестным. Пример таких вычислений даёт задача 26 из папируса Райнда: «Количество и его четвёртая часть дают вместе 15». Таким образом, речь идёт о решении уравнения $x + \frac{1}{4}x = 15$. Египетское решение начинается так: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5». Затем производится деление $15 : 5 = 3$, а в конце умножение $4 \cdot 3 = 12$. Требуемое количество равно 12.

Здесь используется приём, который в средневековой Европе получил название «метод ложного положения». Начинаем с того, что в качестве искомого количества берём произвольное число (в рассматриваемом случае это 4, для которого легко вычислить четвёртую часть). Четыре и его четвёртая часть вместе дают 5. Но результат должен быть равен 15, поэтому выбранное количество нужно ещё умножить на $15 : 5 = 3$.

Вычисления «аха» использовались и для решения двучленных квадратных уравнений вида $ax^2 = b$. Например, решается такая задача: «Квадрат и другой квадрат, сторона которого есть $\frac{3}{4}$ стороны первого квадрата, имеют вместе площадь 100. Вычисли мне это».

В решении берётся квадрат со стороной 1, тогда сторона другого квадрата равна $\frac{3}{4}$. Сумма площадей этих квадратов равна $1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$. Квадратный корень из этой площади равен $\frac{5}{4}$. Квадратный корень из 100 равен 10. А сколько раз $\frac{5}{4}$ входит в 10? Ясно, что 8 раз. Поэтому стороны искомых квадратов равны 8 и $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$.

Данные в условии только что разобранной задачи выбраны, конечно, не случайно. Ясно, что составитель этой задачи был хорошо знаком с тождеством $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Вычисление площадей

В Древнем Египте умели правильно вычислять площадь треугольника и трапеции. При этом площадь представляли в виде прямоугольника: площадь треугольника представляли в виде площади прямоугольника, одна сторона которого равна половине основания треугольника, а другая — его высоте; площадь трапеции представляли в виде площади прямоугольника, одна сторона которого равна полусумме оснований трапеции, а другая — её высоте.

Наряду с правильными формулами применяли и приближённые формулы. Например, площадь четырёхугольника со сторонами a, b, c и d вычисляли по формуле $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Для четырёхугольника, не очень сильно отличающегося от прямоугольника, это приближение достаточно хорошее.

Площадь круга диаметра d считали равной $\left(\frac{8d}{9}\right)^2$. Эту формулу мы ещё обсудим более подробно.

В одном из египетских папирусов, правда, сравнительно позднем (III в. до н. э.), есть интересная приближённая формула для вычисления площади сегмента круга. Если h — высота сегмента, a — длина хорды, отсекающей этот сегмент (рис. 1.1), то его площадь S в этом папирусе считается равной $\frac{ah+h^2}{2}$. В книге «Метрика» Герон

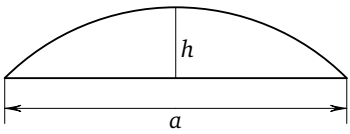


Рис. 1.1

использует формулу

$$S = \frac{ah + h^2}{2} + \frac{1}{14}\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Он также пишет, что «древние» использовали формулу $S = \frac{ah + h^2}{2}$. Герон полагал, что эту формулу они получили, считая площадь круга равной $3R^2$ (тогда для полукруга, т. е. в случае $a = 2h$, формула даёт точный результат). Сам он использует более точное значение $\pi = 22/7$. Если считать, что это значение точное, а не приближённое, то для полукруга его формула даёт точный результат. Для сегментов, близких к полукругу, формула Герона точнее египетской, но при малых по сравнению с a значениями h применять её нельзя. Свидетельства Герона важны для нас, потому что он жил в Александрии и там познакомился со многими традициями египетской математики.

Египетский треугольник

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 получил название *египетского треугольника*. Это произошло, по-видимому, благодаря упоминанию о нём в сочинении Плутарха «Об Исиде и Осирисе»: «И, видимо, египтяне сравнивают природу Всеобщности с красивейшим из треугольников… Этот треугольник имеет катет из трёх частей, основание — из четырёх и гипотенузу — из пяти… Таким образом, катет можно считать мужским началом, основание — женским, а гипотенузу — отпрыском обоих». Но свидетельство Плутарха относится к сравнительно позднему времени (II в.). Что же касается часто встречающихся рассказов о том, что в Египте для построения прямого угла применяли верёвку с узлами, отстоящими друг от друга на расстояния 3, 4 и 5, то эта легенда без каких-либо обоснований появилась в конце XIX в.

Соотношение $3^2 + 4^2 = 5^2$ египтянам было известно; составитель задачи, разобранной на с. 10, это тождество знал. Но тождество $3^2 + 4^2 = 5^2$ не предполагает знания теоремы Пифагора; оно могло возникнуть и без связи с прямоугольными треугольниками. Во всяком случае, в указанной задаче прямой связи с прямоугольными треугольниками нет.

Единственное подтверждение того, что египтянам был известен прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5, дают обмеры памятников архитектуры Египта. Например, в храме Аменхотепа на острове Элефантина (XVI в. до н. э.) использованы пропорции этого треугольника.

Задача Московского папируса

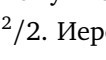
В 1930 году В. В. Струве опубликовал перевод [40] математического папируса, хранящегося в Государственном музее изобразительных искусств им. А. С. Пушкина. Десятая задача этого папируса произвела настоящую сенсацию в мире историков математики. В этой задаче, как считал Струве, вычислялась площадь полусферы. Вот его перевод: «Форма вычисления корзины, если тебе называют корзину с устьем диаметра $4\frac{1}{2}$. О, дай мне знать её поверхность! Сосчитай $\frac{1}{9}$ от 9, потому что корзина есть половина яйца. Получается 1. Посчитай остаток за 8. Сосчитай $\frac{1}{9}$ от 8. Получится $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Отними от 8 эти $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Получается $7\frac{1}{9}$. Теперь $7\frac{1}{9}$ сосчитай $4\frac{1}{2}$ раза. Получается 32. Смотри: это и есть поверхность. Ты правильно нашёл».

Струве считал, что «корзина с устьем диаметра $4\frac{1}{2}$» — это полусфера с диаметром $d=4\frac{1}{2}$. При этом площадь S полусферы в решении задачи вычисляется по формуле

$$S=d\left\{\left(2d-\frac{1}{9}\cdot 2d\right)-\frac{1}{9}\left(2d-\frac{1}{9}\cdot 2d\right)\right\}=2\left(\frac{8}{9}d\right)^2. \qquad (1.1)$$

В Египте площадь круга с диаметром d вычисляли как $(8d/9)^2$. При таком приближении для числа π формула (1.1) правильная. В самом деле, площадь сферы в 4 раза больше площади большого круга (экватора) этой сферы.

Это толкование весьма заманчиво, потому что формула для вычисления площади сферы свидетельствует об очень высоком уровне развития математики. Но даже сам Струве не считал своё толкование единственно возможным, и почти сразу после него Пит [34] и Нейгебауэр [33, 13] предложили другие переводы и толкования. Больше всего споров вызывает иероглиф , который Струве перевёл как «корзина». Выражение «корзина есть половина яйца» свидетельствует, по-видимому, о том, что «корзина» — это некоторый специальный технический термин, и это выражение означает, например, что «полушарие есть половина шара». Отметим, кстати, что перевод «яйцо» весьма условен, потому что соответствующее место папируса сильно испорчено. Этот технический термин может означать не только половину шара, но и половину круга. Струве не исключал такой возможности, тем более что $4\frac{1}{2}$ может означать

не только диаметр d, но и радиус r. Во втором случае речь должна идти о полукруге, потому что его площадь равна $\pi r^2/2$, а площадь полусферы равна $\pi d^2/2$. Иероглиф , стоящий перед $4\frac{1}{2}$, также свидетельствует о том, что речь идёт, по-видимому, о двумерной, а не трёхмерной фигуре. Поэтому весьма вероятно, что в задаче приведено вычисление площади полукруга.

Есть ещё и другие толкования текста этой задачи. Пит предположил, что речь идёт не о поверхности полусферы, а о половине боковой поверхности цилиндра диаметром $4\frac{1}{2}$ и такой же высотой, а Нейгебауэр — что речь идёт о вычислении поверхности купола.

* * *

При любом толковании задачи 10 Московского папируса ясно, что она связана с числом π, причём для него используется стандартное для египтян приближение $4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}16$. Это приближение выглядит странно. Его происхождение пытались объяснить по-разному, но почти все гипотезы неубедительны. Одна из наиболее правдоподобных гипотез выдвинута в книге [19]. Она основана на формуле (1.1). Согласно этой формуле, площадь круга диаметра d должна вычисляться как $\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2 - \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right)d^2$. Такую последовательность вычислений можно объяснить следующим образом. Впишем круг в квадрат со стороной 1. Вырежем из этого квадрата четыре квадратика со стороной $1/6$ (рис. 1.2). Площадь оставшейся части равна $1-4\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1-\frac{1}{9}$, но она ещё явно больше площади круга. Вырежем ещё восемь квадратиков со стороной $1/9$. Их

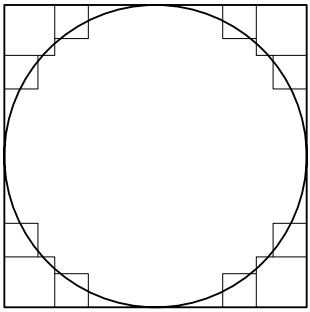


Рис. 1.2

площадь равна $\frac{8}{81} = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$, а площадь оставшейся части равна $1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{9}\right)$. Возможно, что египтяне поступили именно так и решили, что площадь оставшейся части равна площади круга.

Интересные, хотя и менее правдоподобные гипотезы о происхождении древнеегипетской формулы для площади круга предложены в статьях [5] и [27].

Объём усечённой пирамиды

Применение египтянами формулы для вычисления площади сферы вызывает сомнения. Но применение ими формулы для вычисления объёма усечённой пирамиды с квадратными основаниями несомненно. Не совсем ясна лишь форма этой пирамиды. Сохранившийся чертёж неточен. По-видимому, в задаче рассматривалась пирамида, две смежные боковые грани которой перпендикулярны основаниям (рис. 1.3).

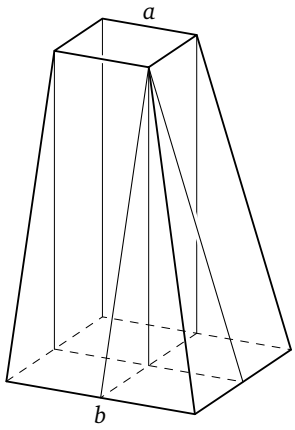


Рис. 1.3

Объём усечённой пирамиды, основаниями которой являются квадраты со сторонами $a = 2$ и $b = 4$, а высота h равна 6, в задаче 14 Московского математического папируса вычислялся как $\frac{6}{3} \cdot (2^2 + 2 \cdot 4 + 4^2)$, т. е. как $\frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$. Эта формула точная.

Объём пирамиды, вообще говоря, нельзя найти путём разрезания куба. Это можно сделать лишь для некоторых пирамид. Например, в вавилонских глиняных табличках вычисляется лишь объём

пирамиды, угол между основанием (квадратным) и боковыми гранями которой равен 45°, а куб можно разрезать на шесть таких пирамид (подробности см. на с. 32).

Данные египетской задачи в этом отношении таковы, что от общего случая эта конкретная задача ничем существенным не отличается. Таким образом, если формула для нахождения объёма усечённой пирамиды не была случайной догадкой, то для её доказательства требовалось применение предельного перехода в том или ином виде.

Нет никаких оснований сомневаться в том, что объём пирамиды был найден раньше, чем объём усечённой пирамиды. Но переход от пирамиды к усечённой пирамиде у египтян должен был вызвать затруднения. На рис. 1.3 показано, как рассматриваемую усечённую пирамиду можно разрезать на прямоугольный параллелепипед, две призмы и пирамиду. Поэтому объём усечённой пирамиды равен

$$a^2h + (b-a)ah + (b-a)^2\frac{h}{3} = abh + (b-a)^2\frac{h}{3}$$

(переход от одной из этих формул к другой можно осуществить, сложив из двух призм параллелепипед). Но переход от этих формул к применявшейся египтянами формуле $(a^2+ab+b^2)h/3$ далеко не очевиден. Алгебраическое тождество $3ab + (b-a)^2 = a^2 + ab + b^2$ египтянам вряд ли было хорошо знакомо. Переход от одной формулы к другой, скорее всего, был осуществлён геометрически. Это можно было сделать, например, следующим образом. Заменим призмы и пирамиду на равновеликие им прямоугольные параллелепипеды (рис. 1.4(а)). Затем отрежем от параллелепипеда, соответствующего одной из призм, часть, возвышающуюся над параллелепипедом, соответствующим пирамиде (на рис. 1.4(а) эти разрезы изображены штриховыми линиями). Отрезанную часть приставим к параллелепипеду, соответствующему второй призме (рис. 1.4(б)). Плоскости, удалённые от основания полученной фигуры на расстояния $h/3$ и $2h/3$, разрезают её на прямоугольные параллелепипеды объёма $a^2h/3$, $abh/3$ и $b^2h/3$.

Архитектура

Исследование египетской архитектуры имеет большое значение для истории математики. Например, в математических папирусах не упоминается прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 (египетский треугольник), но обмеры архитектурных памятников показывают, что пропорции этого треугольника использовались в

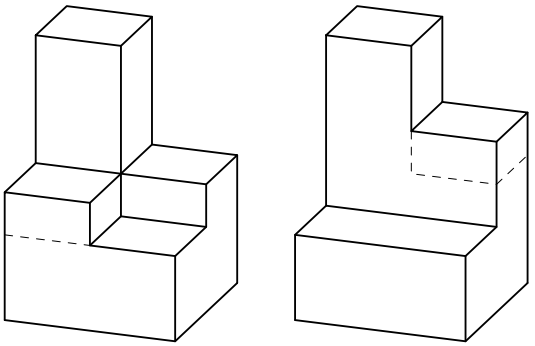


Рис. 1.4

египетской архитектуре. Своды египетских храмов выглядят обычно следующим образом. Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = 5$ и катетами $AC = 3$ и $BC = 4$; AB_1C — такой же треугольник (рис. 1.5). Проведём дуги B_1D_1 и BD окружностей радиуса BB_1 с центрами B и B_1 (точки D_1 и D лежат на прямых AB и AB_1 соответственно), а затем проведём дугу DD_1 окружности с центром A.

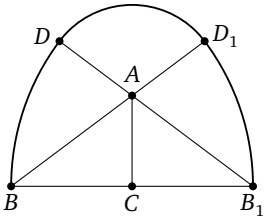


Рис. 1.5

Функции архитекторов и математиков слились в египетских гарпедонаптах («натягивателях верёвок»). При заложении храмов совершалась торжественная церемония — натягивание верёвок для определения направлений стен храма. О важности этой церемонии свидетельствуют египетские рисунки, на которых изображены совершающие её фараоны в белых или красных коронах, боги, богини, жрецы. О натягивании верёвок фараонами при заложении храмов есть и письменные свидетельства. Храм Амона-Ра в Карнаке ориентирован на точку восхода Солнца в день зимнего

солнцестояния. На одной из его стен изображён фараон Тутмос III (1500 до н. э.), натягивающий верёвку при заложении храма. На другом рисунке фараон при заложении храма проводит мотыгой священную борозду.

Непосредственное отношение к египетской геометрии имеет понятие наклона, применявшееся в архитектуре. При этом длины в вертикальном направлении измеряли в царских локтях, а в горизонтальном — в ладонях (царский локоть считали равным семи ладоням, а обычный — шести). Наклоном называли величину b/a (рис. 1.6), где a равно 1 локтю, b — расстояние, измеренное в ладо-

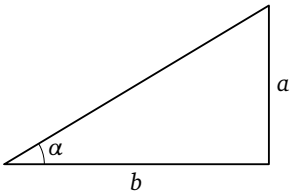


Рис. 1.6

нях. Так как $b/a = 7\operatorname{ctg}\alpha$, то эту величину лучше назвать покатостью: она тем меньше, чем больше (круче) наклон. Любопытно, что в Вавилоне горизонтальные и вертикальные отрезки тоже измеряли в разных единицах: вертикальные, как и в Египте, в локтях, а горизонтальные — в единицах «гар», где 1 гар = 12 локтей.

Понятие наклона свидетельствует о том, что египтяне имели некоторое представление о подобии треугольников.

Единица измерения наклона позволяет сделать достаточно правдоподобные предположения о том, какими принципами руководствовались египетские архитекторы при выборе угла наклона граней пирамид. В этом отношении наиболее изучена пирамида Хеопса, поэтому мы разберём некоторые гипотезы о выборе угла наклона её граней. Одно из первых известных нам объяснений содержится в книге Геродота «История» (V в. до н. э.): «Она четырёхсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плефров и такой же высоты». Длина стороны пирамиды Хеопса равна 233 м; это весьма хорошо согласуется со значением 8 плефров (236,8 м). Но высота пирамиды равна 147 м и отличается от длины стороны слишком сильно. Брёйнс, рецензируя книгу по истории древнеегипетской математики, высказал предположение, что в этом месте текст Геродота испорчен (см. [25]). Он предложил изменить в этом тексте одну букву,

после чего перевод текста выглядит следующим образом: «Она четырёхсторонняя, каждая сторона её шириной в 8 плефров и равна квадрату высоты» (имеется в виду, что площадь стороны пирамиды равна квадрату высоты). Это толкование очень хорошо согласуется с реальными размерами пирамиды Хеопса. В самом деле, пусть a — сторона пирамиды, b — высота грани, h — высота пирамиды. Тогда по условию $ab/2 = h^2$, а по теореме Пифагора $4h^2 = 4b^2 - a^2$. Следовательно, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 4h^2 + b^2 = 5b^2$, а значит, $b = \dfrac{a}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$ и $h^2 = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{a^2}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Если φ — угол боковой грани такой пирамиды, то $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, поэтому $\varphi \approx 51^\circ 49' 38''$. Это хорошо согласуется с измерениями угла наклона грани пирамиды Хеопса, дающими значение $51^\circ 50'$.

Согласно толкованию Брёйнса, при сооружении пирамиды Хеопса использованы пропорции золотого сечения. (Золотым сечением называют такое деление отрезка AB точкой C, что $AC : AB = BC : AC$; если $AC = x$ и $BC = 1$, то $x : (x+1) = 1 : x$, т. е. $x = (1+\sqrt{5})/2$.) Но это толкование не единственное. Весьма интересное объяснение выбора угла наклона грани не только пирамиды Хеопса, но и других пирамид предложено в статье [35]. Как мы уже говорили, для измерения угла наклона в Египте использовали величину $7\operatorname{ctg}\alpha$. Робинс и Шют, авторы этой статьи, установили, что наиболее распространён был наклон граней, при котором эта величина равна $5\frac{1}{2}$; в более поздней архитектуре (около XVII в. до н. э.) величина $5\frac{1}{2}$ заменилась на $5\frac{1}{4}$. Если $7\operatorname{ctg}\alpha = 5\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7 : 5\frac{1}{2} = \frac{14}{11}$, т. е. $\alpha \approx 51^\circ 50' 34''$. Эта величина тоже очень хорошо согласуется с углом наклона грани пирамиды Хеопса. Если же $7\operatorname{ctg}\alpha = 5\frac{1}{4}$, то $\operatorname{tg}\alpha = 7 : \frac{21}{4} = 4 : 3$, т. е. в этом случае мы приходим к пропорциям треугольника со сторонами 3, 4 и 5 (египетского треугольника). Возможно, изменение угла наклона пирамид связано с сознательным применением пропорций этого треугольника.

Вавилон

Математика Древнего Вавилона известна нам в основном из расшифрованных текстов глиняных табличек. Некоторые из этих клинописных текстов содержат разные задачи и таблицы чисел. Эти задачи большей частью учебные; такие глиняные таблички были своего рода учебниками.

В Вавилоне должность писца считалась столь же почётной, как и в Египте: «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писать на табличках, будет сверкать подобно солнцу». Каждый писец должен был хорошо знать математику.

Вавилонская техника вычислений была гораздо более совершенной, чем египетская, и задачи решались тоже более сложные, например, связанные с системами линейных уравнений и с квадратными уравнениями. От аликвотных дробей, на которых остановилась египетская математика, в Вавилоне быстро перешли к дробям общего вида.

В Вавилоне использовались две системы счисления: десятичная и шестидесятеричная. Точнее говоря, в шестидесятеричной системе числа записывались в виде $a_n \cdot 60^n + \ldots + a_1 \cdot 60 + a_0$, а для записи чисел $a_0, \ldots, a_n$ использовались два символа, один из которых обозначал единицы, а другой — десятки. Запись была неоднозначной: числа, отношение которых равно 60, записывались одинаково; кроме того, отсутствовал знак пропуска разряда, соответствующий нашему нулю, поэтому, например, числа $60 + 1$ и $60^2 + 1$ тоже записывались одинаково. Какое именно написано число, порой можно понять лишь из контекста.

Для вычислений в Вавилоне широко использовались разного рода таблицы. Во многом это связано с тем, что вычисления в шестидесятеричной системе более сложные, чем в десятичной. В частности, таблица умножения слишком велика, и запомнить её почти невозможно. Вместо деления производилось умножение на обратную величину, поэтому часто применялись таблицы обратных величин. Сначала в такие таблицы включались только те обратные величины чисел, которые были конечными шестидесятеричными дробями, т. е. обратные величины чисел вида $2^a 3^b 5^c$. В более позднее время в таблицы включались и приближённые значения обратных величин чисел 7, 11, 13, 17, 19 и т. д. Известна даже таблица чисел вида $n^3 + n^2$. Её, по-видимому, использовали для решения уравнения $x^3 + x^2 = a$, встречающегося в одной из табличек.

Одна вавилонская задача

Чтобы стало ясно, что представляют собой дошедшие до нас вавилонские математические тексты, приведём конкретный пример. К этому тексту нам ещё не раз придётся возвращаться, потому что в нём слились многие особенности вавилонской математики. Вот перевод этого текста.

«Длина, ширина. Длину и ширину я перемножил и площадь получил. Затем избыток длины над шириной я прибавил к площади; 183 получилось у меня. Затем я длину и ширину сложил: 27. Спрашивается длина, ширина и площадь.

(Даны)	27 и 183	суммы,
(Результат)	15 длина 12 ширина	180 площадь.

Ты сделаешь так:

$$27 + 183 = 210,$$
$$27 + 2 = 29.$$

Возьми половину от 29 (это даёт 14,5).

$$14{,}5 \times 14{,}5 = 210{,}25,$$
$$210{,}25 - 210 = 0{,}25.$$

0,25 имеет квадратный корень 0,5.

$$14{,}5 + 0{,}5 = 15 \qquad \text{длина},$$
$$14{,}5 - 0{,}5 = 14 \qquad \text{ширина}.$$

Отними 2, которые ты прибавил к 27, от ширины 14; 12 истинная ширина.

15 длину, 12 ширину я перемножил:

$$15 \times 12 = 180 \qquad \text{площадь},$$
$$15 - 12 = 3,$$
$$180 + 3 = 183»[1].$$

Решение задачи приведено в виде последовательности операций с некоторыми числами. Для вавилонских текстов это характерно. Общие правила в них содержатся крайне редко. Но в данном случае легко понять, что означают все встречающиеся числа, т. е. решение можно перевести на современный алгебраический язык. Пусть x — длина, y — ширина прямоугольника. В задаче требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x - y = 183, \\ x + y = 27. \end{cases}$$

[1]Цитируется по [7, с. 87]. Числа записаны в десятичной системе, а не в шестидесятеричной, как у ван дер Вардена.

Для упрощения этой системы делается замена $y' = y + 2$. Тогда

$$xy' = xy + 2x = (xy + x - y) + (x + y) = 183 + 27 = 210$$

и $x + y' = x + y + 2 = 27 + 2 = 29$.

Система уравнений

$$\begin{cases} xy = p, \\ x + y = a \end{cases}$$

в Вавилоне решалась обычно по правилу $x = a/2 + w$ и $y = a/2 - w$, где $w = \sqrt{(a/2)^2 - p}$. Это правило применено и в нашем случае: $(a/2)^2 = (29/2)^2 = 210{,}25$ и $(a/2)^2 - p = 210{,}25 - 210 = 0{,}25$. Далее вычисляется $x = (a/2) + w = 14{,}5 + \sqrt{0{,}25} = 14{,}5 + 0{,}5 = 15$ и $y' = (a/2) - w = 14{,}5 - 0{,}5 = 14$. Наконец, $y = y' - 2 = 14 - 2 = 12$.

Комментирование этого текста не вызывает затруднений. Но у многих других табличек с математическими текстами важные для их понимания части отломаны или сколоты. Кроме того, в них встречаются ошибки и описки.

Квадратные уравнения

В математических табличках часто встречаются задачи, связанные с квадратными уравнениями. Рецепты для решения таких задач показывают, что вавилонские математики знали общее правило решения тех типов квадратных уравнений, которые они рассматривали. А рассматривали они только два типа квадратных уравнений: $x^2 + ax = b$ и $x^2 - ax = b$. В Вавилоне операции сложения и вычитания были известны, но числа рассматривались только положительные. Корни уравнений, разумеется, могли быть только положительными. Есть ещё один тип квадратных уравнений, которые могут иметь положительные корни, а именно, $x^2 + b = ax$. Но уравнения такого типа в Вавилоне не рассматривали. Это довольно странно, потому что эквивалентные им системы уравнений $x + y = a$, $xy = b$, как видно из первого нашего примера вавилонской задачи, в Вавилоне решали. Возможно, уравнения типа $x^2 + b = ax$ не рассматривали потому, что такие уравнения могли иметь не один положительный корень (как уравнения $x^2 + ax = b$ и $x^2 - ax = b$), а два. По-видимому, вавилонские математики не понимали, как к этому нужно относиться.