ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ПРАВОСУДИЯ

МАТЕМАТИКА
для юристов

Под редакцией Д. А. Ловцова

Москва
2009

УДК 51
ББК 22.1
М …

Авторы:

В. Т. Королев,
профессор, кандидат технических наук,

Д. А. Ловцов,
профессор, доктор технических наук,

В. В. Радионов,
доцент, кандидат технических наук

В. Ю. Квачко,
кандидат физико-математических наук,

Редактор:

Д. А. Ловцов,
профессор, доктор технических наук

Математика для юристов / Под ред. Д. А. Ловцова. — М.: РАП, 2009.
ISBN …

Содержание учебного пособия отвечает программе по дисциплине «Информатика и математика», которая разработана в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования к минимуму содержания и уровню подготовки юриста (специальность 030501 – «Юриспруденция») в области информатики и математики.

Пособие содержит материалы, относящиеся к первому раздzелу учебной программы. Изложены аксиоматический метод построения оснований математики, начала математического анализа с элементами алгоритмов решения вычислительных задач, введение в теорию вероятностей.

Пособие адресовано студентам юридических вузов. Им могут пользоваться и преподаватели, ведущие занятия по этой и родственным дисциплинам, а также те юристы-практики, кому необходимо самостоятельно изучить элементы высшей математики.

© В. Т. Королев, Д. А. Ловцов,
В. В. Радионов, В. Ю. Квачко, 2009
© Российская академия правосудия, 2009

ISBN …

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов 5

Введение 8

РАЗДЕЛ I.
Основания математики

Глава 1. Элементы теории множеств 11
1.1. Понятие множества 11
1.2. Операции над множествами 13
1.3. Аксиомы и теоремы алгебры множеств 15

Глава 2. Элементы математической логики 18
2.1. Начала алгебры высказываний 18
2.2. Аксиомы и теоремы алгебры логики 25
Вопросы и задачи для самоконтроля 29

РАЗДЕЛ II.
Основы математического анализа

Глава 3. ЧИСЛА 30
3.1. Системы счисления 30
3.2. Классы чисел 34
3.3. Алгоритмы решения вычислительных задач 40
Вопросы и задачи для самоконтроля 43

Глава 4. Функции 44
4.1. Понятие функции 44
4.2. Аппроксимация функций 48
4.3. Предел функции 51
Вопросы и задачи для самоконтроля 57

Глава 5. Основы дифференциального исчисления 58
5.1. Производная 58
5.2. Свойства дифференцируемых функций 62
5.3. Дифференциал функции 64
5.4. Машинные алгоритмы вычисления функций 66
Вопросы и задачи для самоконтроля 70

Глава 6. Основы интегрального исчисления 72
6.1. Определенный интеграл 72

6.2. Машинные алгоритмы
вычисления определенных интегралов 81
Вопросы и задачи для самоконтроля 87

РАЗДЕЛ III.
Основы теории вероятностей

Глава 7. Понятие вероятности 89
7.1. Элементы комбинаторики 89
7.2. Случайные события 95
7.3. Классическое определение вероятности 101
7.4. Теорема умножения вероятностей 103
7.5. Основные формулы теории вероятностей 107
Вопросы и задачи для самоконтроля 112

Глава 8. Случайные величины 114
8.1. Понятие случайной величины 114
8.2. Законы распределения случайных величин 115
8.3. Числовые характеристики случайных величин 121
8.4. Канонические распределения случайных величин 125
Вопросы и задачи для самоконтроля 131

Ответы к задачам 133

Приложение. Тесты 142

Литература 168

Алфавитно-предметный указатель 169

РАЗДЕЛ I.
Основания математики

Если все преступления, совершенные по совокупности, являются преступлениями небольшой и средней тяжести, то окончательное наказание назначается путем поглощения менее строгого наказания более строгим либо путем частичного или полного сложения назначенных наказаний.

(УК РФ, Ст. 69, ч. 2)

Глава 1. Элементы теории множеств

1.1. Понятие множества

Множество – одно из первичных, фундаментальных понятий математики. Однако строгого определения этого понятия в рамках самой теории множеств не существует. Его можно лишь пояснить, приведя примеры множеств. Скажем, множество студентов первого курса академии, множество законодательных актов по правам человека, множество пятен на Солнце и т.д.

Объекты, составляющие множество называют элементами. Когда это удобно, элементы множества называют точками (например, элементы множества вещественных чисел – точки на числовой прямой). В теории множеств, как и в любой математической теории, используют свою систему обозначений. Так, сами множества обозначают прописными буквами A, B, X, Y, а для обозначения элементов используют строчные буквы a, b, x, y. Если a – элемент множества A, то говорят, что a принадлежит A, и этот факт задают такой записью: $a \in A$. Если же a не является элементом множества A, то пишут: $a \notin A$, и говорят, что a не принадлежит A.

Различают конечные множества и бесконечные. Конечное множество состоит из конечного числа элементов, причем неважно: известно это число или нет, главное, что оно существует. Общее число элементов в конечном множестве называют его мощностью. Количество элементов в бесконечном множестве подсчету не поддается, даже теоретически.

Задать конечное множество можно, просто перечислив его элементы. Например, множество X из n элементов: $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$. В частности, при $n=1$ имеем одноэлементное множество $X=\{x_1\}$. Однако простое перечисление элементов множества неудобно для больших n и вовсе не годится для задания бесконечных множеств.

Выход из этой ситуации – задать множество описанием свойств его элементов (с помощью характеристического свойства множества). Пусть все элементы x множества X обладают свойством P(x). Тогда это множество задается такой конструкцией: X={x: P(x)}. Ее читают так: множество X, состоящее из элементов x таких, что каждый из них обладает свойством P(x). Скажем, множество A={1, 2, 3, 4, 5} можно задать и так: A={x: x∈ N и x<6}, где N – множество натуральных чисел. Еще пример. Отрезком [a,b] называется такое множество: [a,b]={x∈ R: a≤x≤b}. Фразу эту можно прочесть так: отрезок [a,b] – это элементы x из множества R вещественных чисел, значения которых больше или равны a и меньше или равны b. А запись]a,b[={x∈ R: a<x<b} задает множество, называемое интервалом с открытыми границами (элементы x из множества вещественных чисел такие, что их значения строго больше a и меньше b).

Если множество A является частью множества B, то говорят, что A есть подмножество B. Записывается это отношение множеств так: A⊂B. А запись B⊂A говорит о том, что B есть подмножество A.

Множества A и B называют равными, когда они состоят из одних и тех же элементов. На языке теории множеств это записывают так: A=B. Например, множества A={3,5,7,9} и B={7,3,9,5} состоят из одних и тех же элементов, значит, они равны.

Множества A и B равны тогда, когда одновременно выполняются условия:

если x∈ A, то x∈ B,

если x∈ B, то x∈ A.

Например, A – множество всех четных положительных чисел, B – множество положительных чисел, каждое из которых есть сумма двух положительных нечетных чисел. Докажем, что A=B.

Проверим, выполняются ли указанные условия:

Пусть x∈ A, то есть x – положительное четное число. Это значит, что x=2×k, где k – некоторое натуральное число. Преобразуем выражение для x: x=(2×k–1)+1, то есть представим x суммой двух положительных нечетных чисел 2×k–1 и 1. А это означает, что x∈ B.

Пусть x∈ B, то есть $x=m_1+m_2$, где m_1 и m_2 – положительные нечетные числа. Для них всегда можно найти такие натуральные числа k_1 и k_2, что $m_1=2\times k_1-1$, а $m_2=2\times k_2-1$. Тогда $x=2\times k_1-1+2\times k_2-1=2\times(k_1+k_2-1)=2\times k$. Значит, x – положительное четное число, поскольку $k=k_1+k_2-1$ – натуральное число. Следовательно, x∈ A.

Итак, утверждение A=B (при заданных условиях) доказано.

Утверждение A=B верно и тогда, когда между ними одновременно имеют место отношения:

$A \subset B$ и $B \subset A$.

Зададим, например, множество W так:

W={M,H,O,Ж,E,C,T,B,A}.

Вот некоторые из его подмножеств:

S1={H,O,C}, S2={C,O,H}, S3={M,A,H,E,Ж},
S4={ M,O,H,E,T,A}, S5={Ж,E,M,A,H,C,T,B,O}.

Как видим, S1=S2, а $S4 \subset W$. Точно так $S5 \subset W$. В то же время и $W \subset S5$. Значит, W=S5.

Обычно в ходе исследования тех или иных множеств можно ввести в рассмотрение такое множество, которое включает в себя все допустимые в этом исследовании множества. Такое широкое множество называют универсальным и обозначают символом Ω. Все исследуемые множества являются подмножествами Ω. Например, при распределении фонда аудиторий в расписании занятий для первого курса оперируют с группами и подгруппами студентов. В качестве универсального множества при этом можно рассматривать сам первый курс.

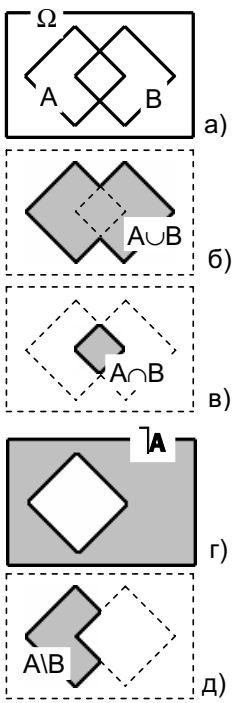

Рис. 1.1

Для полноты картины удобно ввести в рассмотрение и пустое множество, в котором нет ни одного элемента и которое обозначают символом ∅.

1.2. Операции над множествами

В теории множеств рассматривают операции, которые позволяют из одних множеств получать другие. Опишем эти операции.

Пусть заданы множества A, B и Ω (*рис.1.1,а*).

Объединением множеств A и B является новое множество, состоящее из элементов множества A или множества B (*рис.1.1,б*). Обозначают операцию объединения так: $A \cup B$. Другими словами:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Эта запись означает, что множество $A \cup B$ образуют элементы x, а каждый из них входит или в A, или в B, или в оба эти множества. Например, A={1, 2, 3}, B={1, 3, 4}. Тогда $A \cup B$={1, 2, 3, 4}. В последнем множестве элемент 2 принадлежит множеству A, элемент 4 – множеству B, а эле-

менты 1 и 3 входят и в A, и в B.
Можно составить объединение любого числа множеств:

$$D=A\cup B\cup\ldots\cup C.$$

Пересечением множеств A и B называют новое множество, которое состоит из элементов, общих для A и B (*рис.1.1,в*). Пересечение множеств A и B обозначают как $A\cap B$ и определяют записью

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ и } x\in B\}.$$

Эта запись означает, что множество $A\cap B$ образуют элементы x, а каждый из них входит и в A, и в B. Например, пересечением множеств из предыдущего примера будет множество $A\cap B=\{1, 3\}$.

Два множества A и B называют **непересекающимися**, если $A\cap B=\varnothing$. Если же $A\cap B\neq\varnothing$, то A и B – **пересекающиеся** множества.

Можно составить пересечение любого числа множеств:

$$D=A\cap B\cap\ldots\cap C.$$

Дополнением множества A (до универсального множества Ω) называется новое множество $\neg A$ (или $\overline{A}$), включающее в себя элементы множества Ω, но без элементов множества A (*рис.1.1,г*):

$$\neg A=\{x: x\in\Omega \text{ и } x\notin A\}.$$

Например:

Ω={Азия, Африка, Америка, Австралия, Антарктида}.
A={Австралия, Антарктида}.

Тогда

$\neg A=\neg$ {Австралия, Антарктида}={Азия, Африка, Америка}.

Дополнение – одноместная операция, выполняется над одним множеством.

Теперь можно сказать, что универсальным является такое множество Ω, для которого справедливы соотношения:

$$A\cap\Omega=A,\ A\cup\Omega=\Omega.$$

Здесь A – произвольное множество.

В теории множеств используют и другие операции. Однако трех рассмотренных операций оказывается достаточно. Любое преобразование множеств можно представить суперпозицией операций объединения, пересечения и дополнения.

*Объединение, пересечение множеств, дополнение множества до универсального образуют **функционально полную** систему операций алгебры множеств.*

При построении суперпозиций названных операций следует учитывать правило о приоритетах: наивысшим приоритетом обладает дополнение, следующий приоритет – у пересечения, самый низкий приоритет – у объединения. Нарушить правило о приоритетах и задать иной порядок выполнения операций позволяют скобки. Выражение в скобках реализуется в первую очередь.

Например, разностью множеств A и B называют множество A\B, в которое включены элементы множества A и не включены элементы множества B (*рис.1.1,д*), то есть

$$A\setminus B=\{x: x\in A \text{ и } x\notin B\}.$$

Выразим операцию A\B в терминах функционально полной системы операций:

$$A\setminus B=A\cap \neg B. \quad (1.1)$$

Иногда удобно бывает представить дополнение множества A до универсального такой разностью:

$$\neg A=\Omega\setminus A.$$

Отметим, что после выполнения той или иной операции над заданными множествами остается только результат операции – новое множество (*рис. 1.1*).

1.3. Аксиомы и теоремы алгебры множеств

Для любых множеств A, B и C справедливы следующие аксиомы и теоремы (*табл. 1.1*). Здесь утверждения 1..5 и 1'..5' – аксиомы алгебры множеств, остальные утверждения – некоторые из основных ее теорем. И те, и другие объединим одним словом – тождества.

Таблица 1.1

1	$A\cup B=B\cup A$	5	$A\cup \neg A=\Omega$	9	$(A\cap B)\cup(A\cap \neg B)=A$
1'	$A\cap B=B\cap A$	5'	$A\cap \neg A=\varnothing$	9'	$(A\cup B)\cap(A\cup \neg B)=A$
2	$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$	6	$A\cup\Omega=\Omega$	10	$\neg(A\cup B)=\neg A\cap \neg B$
2'	$A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)$	6'	$A\cap\varnothing=\varnothing$	10'	$\neg(A\cap B)=\neg A\cup \neg B$
3	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	7	$A\cup A=A$	11	$\neg\Omega=\varnothing$
3'	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	7'	$A\cap A=A$	11'	$\neg\varnothing=\Omega$
4	$A\cup\varnothing=A$	8	$A\cup(A\cap B)=A$	12	$\neg\neg A=A$
4'	$A\cap\Omega=A$	8'	$A\cap(A\cup B)=A$		

Укажем на известную аналогию между приведенными аксиомами алгебры множеств и аксиомами школьной алгебры. Так, в теории множеств аксиомы 1 и $1'$ называются коммутативными законами. Эти законы утверждают, что в операциях объединения и пересечения операнды можно располагать в любом порядке. Аксиомы 2 и $2'$ – это ассоциативные законы для множеств. Они свидетельствуют о том, что каждую из многоместных операций над множествами можно свести к последовательности двуместных операций. Аксиоме $3'$ в школьной алгебре отвечает дистрибутивный закон. А вот аксиоме 3 в школьной алгебре нет аналога. Тем не менее, аксиомы 3 и $3'$ алгебры множеств называются дистрибутивными законами для множеств. Эти законы задают правила раскрытия скобок (если двигаться от левой части равенства к его правой части) или же правило выноса за скобки подобных членов (если двигаться в обратном направлении).

Обратим внимание на парные утверждения *табл. 1.1*. Тождество номер J' получают из парного тождества номер J ($J=\overline{1,11}$) путем замены в нем символа $\cup$ на символ $\cap$ и наоборот, символа Ω на символ $\varnothing$ и наоборот. Говорят, что тождества J и J' двойственны (дуальны) друг другу.

Для любых дуальных выражений справедливо утверждение: если выражение J верно, то верно и двойственное ему выражение J'. Поэтому нет нужды доказывать верность каждого из дуальных выражений, достаточно доказать лишь одно из них. Это утверждение называют принципом двойственности.

Ради полной симметрии в выражениях 1..10 и $1'..10'$ скобки проставлены и там, где без них можно было бы обойтись по правилу о приоритетах.

Аксиомы 1..5 и $1'..5'$ средствами теории множеств не доказываются, но подтверждаются проверкой. Проверим, например, верность утверждения 3. Отправляемся от его левой части. Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда по определению для объединения имеем $x \in A$ или $x \in (B \cap C)$. Но если $x \in A$, то x принадлежит и объединению A с любым другим множеством. В частности $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Значит, x принадлежит пересечению этих множеств, то есть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, а это – правая часть утверждения 3. А если $x \in (B \cap C)$, то из определения для пересечения множеств вытекает, что $x \in B$ и $x \in C$. Значит, x принадлежит и объединению каждого из множеств B и C с любым другим множеством, в частности с A: $x \in (A \cup B)$ и $x \in (A \cup C)$. Тогда снова имеем $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Так, двигаясь от левой части 3, приходим к его правой части. Аналогично, двигаясь от правой части 3, можно прийти к его левой части. Поскольку утверждение 3 верно, верно и утверждение 3'.

Тождества 1..11, 1'..11' и 12 используют для доказательства тех или иных утверждений относительно множеств, для упрощения выражений алгебры множеств. Докажем, к примеру, следующее утверждение:

если $A \cup B = \Omega$ и $A \cap B = \varnothing$, то $B = \neg A$.

Номера тождеств, которые используются в цепочке наших рассуждений, будем заключать в угловые скобки. Итак,

$$B = \langle 4 \rangle = B \cup \varnothing = \langle 5' \rangle = B \cup (A \cap \neg A) = \langle 3 \rangle = (B \cup A) \cap (B \cup \neg A) =$$
$$= \langle 1 \text{ и условие } A \cup B = \Omega \rangle = \Omega \cap (B \cup \neg A) = \langle 5 \rangle =$$
$$= (A \cup \neg A) \cap (B \cup \neg A) = \langle 1 \rangle = (\neg A \cup A) \cap (\neg A \cup B) = \langle 3 \rangle =$$
$$= \neg A \cup (A \cap B) = \langle \text{условие } A \cap B = \varnothing \rangle = \neg A \cup \varnothing = \langle 4 \rangle = \neg A,$$

что и требовалось доказать. Читателю предложим проиллюстрировать наши рассуждения рисунком.

Вопросы и задачи для самоконтроля

1. Поясните понятие множества, какие отношения бывают между множествами. Дайте определение универсального множества.
2. Поясните смысл операций алгебры множеств:
   - объединение множеств,
   - пересечение множеств,
   - дополнение множества до универсального.
3. Поясните основное свойство функционально полной системы операций алгебры множеств.
4. Доказать утверждения алгебры множеств:

   а) $A \cup (\neg A \cap B) = A \cup B$, б) $(A \cap B) \cup (A \cap \neg B) = A$,
   в) $\neg(A \cup B) = (\neg A \cap \neg B)$, г) $\neg(A \cap B) = (\neg A \cup \neg B)$.

5. Универсальное множество Ω его подмножествами A, B, C разбивается на восемь непересекающихся областей 1..8 (*рис.1.2*). Каждую из этих областей описать в терминах операций алгебры множеств.

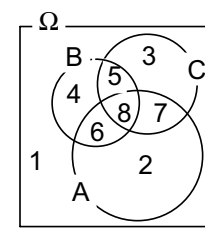

Рис. 1.2

6. На *рис. 1.2* убрать все номера и заштриховать каждую из областей, которые определяются соотношениями:

   а) $\neg(A \cap B \cap C)$, б) $\neg(A \cup B \cup C)$, в) $A \cup \neg(B \cap C)$, г) $\neg(A \cup (B \cap C))$.

7. Составлены два списка правовых документов по проблеме «Информационная безопасность» (список ИБ) и по проблеме «Защита информации» (список ЗИ). Записать те операции над множествами ИБ и ЗИ, которые позволят:

   а) выделить документы, включенные и в список ИБ, и в список ЗИ,

б) выделить документы, включенные только в список ИБ,
в) выделить документы, включенные только в список ЗИ,
г) составить полный перечень документов (без повторов).

Глава 2. Элементы математической логики

2.1. Начала алгебры высказываний

Математическая логика – это теория верных рассуждений. При этом абсолютно безразлично, к какой области эти рассуждения относятся. Цепочка рассуждений, относящихся к той или иной области, описывается на языке математической (формальной) логики, а затем проверяется их верность или ошибочность. Такая универсальность законов математической логики обусловила ее широкое применение, как в технических, так и в гуманитарных науках. Она составляет теоретический фундамент построения и функционирования компьютеров, ее методы активно используются в экономике, медицине, психологии, языкознании и др.

Основное понятие математической логики – высказывание (утверждение). Это понятие средствами математической логики не определяется. Основной признак высказывания: оно может быть или истинным, или ложным. При этом высказывание не может быть и истинным, и ложным одновременно. Говорят, что истина или ложь – возможные значения каждого из высказываний. Содержание высказывания несущественно. Для примера приведем такие высказывания из разных областей:

1) Математика – это круто!
2) H_2O – формула этилового спирта.
3) Если 25 и 3 суть восьмеричные числа, то 25 делится на 3.

Не являются высказываниями фразы типа: «Любовь есть предисловие к разлуке» (И. Бродский), «Зри в корень!» (Козьма Прутков), «Разрешите выйти?»(студент первого курса). Про каждую из них нельзя сказать, истинна она или ложна.

Очевидно, что существуют высказывания простые и сложные. Сложное высказывание можно разложить на простые. Из приведенных выше высказываний первые два – простые, а третье состоит из двух простых высказываний: 25 и 3 суть восьмеричные числа и 25 делится на 3.

Простым называют такое высказывание, никакая часть которого высказыванием уже не является.

Вот еще пример сложного высказывания:

«Преступление признается совершенным с прямым умыслом, если лицо осознавало общественную опасность своих действий (бездействия), предвидело возможность или неизбежность наступления общественно опасных последствий и желало их наступления» (УК РФ, ст. 25, ч. 2).

Простые высказывания в нем:

- преступление признается совершенным с прямым умыслом,
- лицо осознавало общественную опасность своих действий (бездействия),
- лицо предвидело возможность наступления общественно опасных последствий своих действий,
- лицо предвидело неизбежность наступления общественно опасных последствий своих действий,
- лицо желало их наступления.

Начало науки о законах и формах мышления – логики связывают с именем Аристотеля (IV в. до н.э.). В XVII в. Г. Лейбниц (юрист, напомним) ввел в логику математическую символику и использовал ее для общих логических построений, то есть положил начало формализации логики. В XIX в. Дж. Буль последовательно реализовал идеи Г. Лейбница, первым исследовал алгебраические свойства высказываний, тем самым заложил основы математической логики. Поэтому математическую логику нередко называют булевой алгеброй или алгеброй логики.

Простые высказывания в булевой алгебре обозначают буквами и называют логическими переменными. Логическая переменная может принимать одно из двух значений: или истина, или ложь. Удобно значение истина обозначить символом 1, а значение ложь – символом 0.

В математической логике над логическими переменными выполняют логические операции. Каждая логическая операция задается своей таблицей. Входом таблицы является полный набор значений всех логических переменных – операндов (аргументов) данной логической операции, а выходом – ее результат. Такая таблица называется таблицей истинности. Рассмотрим основные логические операции.

Отрицание – одноместная операция. Если ее аргументом будет логическая переменная x, а результатом y, то эта операция задается *табл.2.1*. Как видим, значения x и y взаимно обратны. Поэтому для отрицания используют название инверсия (от англ. inverse – противоположность). Для отрицания вводят такие обозначения:

Таблица 2.1

x	y
0	1
1	0

$y=\neg x$, или $y=\bar{x}$,

читается: y есть НЕ x. Поэтому отрицание называют еще и операцией НЕ. Пусть x – утверждение:

«Математика юристам необходима».

Тогда инверсией $\neg x$ этого высказывания будет фраза:

«Неправда, что математика юристам необходима».

Таблица 2.2

x_1	x_0	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция – многоместная операция. Для двух логических переменных x_1 и x_0 она задается *табл.2.2*. Как видим, y=1 только тогда, когда И x_1=1, И x_0=1. Поэтому конъюнкцию называют еще операцией И. Обозначают конъюнкцию символом $\wedge$ (реже символом &):

$$y=x_1 \wedge x_0 \text{ или } y=x_1 \& x_0.$$

Результат конъюнкции совпадает с результатом умножения чисел 1 и 0. Поэтому ее называют еще и логическим умножением. Пусть x_1 – утверждение:

«Двенадцать делится на три»,

а x_0 – высказывание:

«Двенадцать делится на четыре».

Их конъюнкцией $x_1 \wedge x_0$ будет высказывание:

«Двенадцать делится на три и на четыре».

Конъюнкция n переменных записывается так:

$$y=x_{n-1} \wedge x_{n-2} \wedge \ldots \wedge x_0.$$

Таблица 2.3

x_1	x_0	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Дизъюнкция – тоже многоместная операция. Для двух логических переменных x_1 и x_0 она задается *табл.2.3*. Как видим, y=1 тогда, когда ИЛИ x_1=1, ИЛИ x_0=1, ИЛИ оба аргумента равны 1 (когда хотя бы один из аргументов равен 1). Поэтому дизъюнкцию называют операцией ИЛИ. Для обозначения дизъюнкции применяют символ $\vee$:

$$y=x_1 \vee x_0.$$

Результат дизъюнкции в *табл.2.3*, исключая последнюю строку, совпадает с результатом сложения чисел 0 и 1. Поэтому ее называют еще логическим сложением. Например, x_1 – недобросовестный конкурент причинил убытки другому хозяйствующему субъекту, x_0 – он

нанес ущерб его деловой репутации. Тогда $x_1 \vee x_0$ – это или действие x_1, или действие x_0, или и то и другое вместе (и все они регулируются ст. 4 Закона о конкуренции).

Дизъюнкция n переменных записывается так:

$$y = x_{n-1} \vee x_{n-2} \vee \ldots \vee x_0.$$

Результатом любой из рассмотренных логических операций может быть или 0, или 1. Значит, результат одной логической операции может выступать операндом в другой. Так можно составить суперпозиции логических операций (логические формулы) и из простых высказываний составлять сложные. При этом следует руководствоваться правилом о приоритетах логических операций. Эти приоритеты убывают в таком порядке: НЕ, И, ИЛИ, а требуемый порядок вычислений, нарушающий правило о приоритетах, задают скобками. Например,

$$y = \neg((x_1 \vee \neg x_0) \wedge (\neg x_1 \vee x_0)).$$

Разработаем таблицу истинности для этой формулы (*табл.2.4*), в которой сначала вычислим значения двух дизъюнкций $(x_1 \vee \neg x_0)$ и $(\neg x_1 \vee x_0)$, потом их конъюнкцию и, наконец, инверсию этой конъюнкции. Так получим значения сложного высказывания y для полного набора всех значений высказываний-аргументов x_1 и x_0.

Таблица 2.4

x_1	x_0	$x_1 \vee \neg x_0$	$\neg x_1 \vee x_0$	$(x_1 \vee \neg x_0) \wedge (\neg x_1 \vee x_0)$	$\neg((x_1 \vee \neg x_0) \wedge (\neg x_1 \vee x_0))$
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0

Отрицание, конъюнкция и дизъюнкция образуют функционально полную систему операций математической логики.

Любую другую логическую операцию можно представить суперпозицией этих операций. Тем не менее, приведем еще две логические операции, которые имеют самостоятельное значение в алгебре высказываний.

Импликация – двуместная операция. Она задается *табл.2.5*, а записывается как

$$y = x_1 \rightarrow x_0.$$

Правая часть этой записи читается так: если x_1, то x_0, хотя в импликации между x_1 и x_0 никакой причинно-следственной или смысловой связи нет. Просто из двух высказываний x_1 и x_0 составляется новое высказывание y по правилам, которые заданы *табл.2.5*. В импликации переменная x_1 называется посылкой, а x_0 – заключением. Из *табл.2.5* видно, что импликация принимает значение 0 (ложь) только на одном наборе, а именно, когда x_1=1 (посылка истинна), а x_0=0 (заключение ложно). На остальных наборах ее значение равно 1 (истина). Это проще запоминается, если значения импликации 1 и 0 заменить на их эквиваленты: нет и да (*табл. 2.5*).

Таблица 2.5

x_1	x_0	y	
0	0	1	да
0	1	1	да
1	0	0	нет
1	1	1	да

Логическую конструкцию импликации имеют математические теоремы. Например,

«Если два угла вертикальны, то они равны».

Здесь x_1 – два угла вертикальны, x_0 – они равны. Верности теоремы отвечает последняя строка *табл.2.5*. Утверждение «Если два угла вертикальны, то они не равны» – ложно, а это – третья строка *табл.2.5*. Утверждения «Если два угла не вертикальны, то они равны» (строка вторая *табл.2.5*) и «Если два угла не вертикальны, то они не равны» (первая строка *табл.2.5*) могут быть истинными или ложными, но в импликации подобные утверждения однозначно определены как истинные.

В юридических документах форму импликаций имеют правовые предписания, например (ЖК РФ, ст. 79, ч.6):

«Если договор поднайма заключен без указания срока, наниматель обязан предупредить поднанимателя о прекращении договора поднайма за три месяца».

Запишем импликацию в терминах функционально полной системы операций:

$$x_1 \rightarrow x_0 = \neg x_1 \vee x_0.$$

Таблица 2.6

x_1	x_0	$\neg x_1$	$\neg x_1 \vee x_0$	
0	0	1	1	да
0	1	1	1	да
1	0	0	0	нет
1	1	0	1	да

В верности этого равенства убедимся, построив таблицу истинности (*табл.2.6*) для правой его части и сравнив ее выход с выходом *табл.2.5*. При построении *табл.2.6* мы использовали *табл. 2.1* и *табл.2.3*.

Эквивалентность – многоместная операция. Для двух переменных она задается *табл.2.7*, а записывается так:

$$y = (x_1 = x_0).$$

Правая часть этой записи читается так:

x_1 тогда и только тогда, когда x_0.

Таблица 2.7

x_1	x_0	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Синонимы для эквивалентности:

x_1 в том, и только в том случае, когда x_0;

x_1 есть необходимое и достаточное условие для x_0;

x_0 есть необходимое и достаточное условие для x_1.

если x_1, то x_0, И если x_0, то x_1;

Как видим, эквивалентность равна 1 (истинна) тогда, когда ее аргументы принимают одинаковые значения – или все равны 0 (ложны), или все равны 1 (истинны). Поэтому эквивалентность называют еще равнозначностью и обозначают символом =.

Любое равенство, если его рассматривать как одно высказывание, является эквивалентностью. Например, «Все едино, что в лоб, что по лбу.»

Эквивалентность n переменных записывается следующим образом:

$$y=(x_{n-1}=x_{n-2}=\ldots=x_0).$$

В терминах функционально полной системы операций эквивалентность двух переменных записывается так:

$$(x_1=x_0)=\neg x_1\wedge\neg x_0\vee x_1\wedge x_0.$$

Составим таблицу истинности для правой части этой формулы (*табл.2.8*), сравним ее выход с выходом *табл.2.7* и убедимся в верности приведенной формулы.

Таблица 2.8

x_1	x_0	$\neg x_1\wedge\neg x_0$	$x_1\wedge x_0$	$\neg x_1\wedge\neg x_0\vee x_1\wedge x_0$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Последний из синонимов эквивалентности (если x_1, то x_0, И если x_0, то x_1) позволяет составить для нее еще и такое выражение:

$$(x_1=x_0)=(x_1\rightarrow x_0)\wedge(x_0\rightarrow x_1).$$

Читателю предлагается проверить верность этой формулы самостоятельно.