Азбука науки
для юных гениев

Вильгельм Аренс

Математические игры



УДК 51-8
ББК 22.1
А80

12+

Охраняется законодательством РФ
о защите интеллектуальных прав.
Воспроизведение всей книги или любой ее части
воспрещается без письменного разрешения издателя.
Любые попытки нарушения закона
будут преследоваться в судебном порядке.

Разработка серийного оформления
И.А. Озерова

Wilhelm Ahrens. Mathematische Spiele

Аренс, В.
А80 Математические игры / В. Аренс ; [пер. Б.Д. Каминский]. — М.: ЗАО Центрполиграф, 2018. — 159 с., ил. — (Азбука науки для юных гениев).

ISBN 978-5-9524-5246-6

Вышедшая в начале XX века, в кажущемся теперь таким далеким 1924 году, и высоко оцененная известным популяризатором наук Яковом Исидоровичем Перельманом, книга «Математические игры» немецкого ученого д-ра Вильгельма Аренса снова доступна читателям. В ней увлеченному предметом любознательному исследователю представится возможность познакомиться с неустаревающими упражнениями для ума, полезными и интересными как для юных читателей, знакомых с алгеброй и геометрией, так и для взрослых. Описанные игры, тренирующие внимательность, гибкость ума и логическое мышление, послужат как отличной подготовкой для решения более сложных задач, так и отличным развлечением в часы досуга.

УДК 51-8
ББК 22.1

ISBN 978-5-9524-5246-6

© ЗАО «Центрполиграф»,
издание, оформление, 2018

Глава I
ПРЫГАНЬЕ ВЗАПУСКИ

Начнём со следующей, весьма простой игры. Лицо *A* называет какое-нибудь число, не превышающее 10; его партнёр *B* называет большее число, отличающееся от первого не менее чем на 1, но не более чем на 10. Затем *A* снова называет число, которое превышает второе не менее чем на 1 и не более чем на 10 и т. д. Выигравшим считается тот, кто первый назовёт число 100. Всегда ли это возможно и если возможно, то кто выигрывает и каким образом?

Нагляднее игру эту можно представить следующим образом. Два мальчика *A* и *B*, каждый из которых может прыгнуть на расстояние не свыше 10 футов[1], сговорились поочерёдными прыжками пройти путь в 100 футов, соблюдая следующие условия: каждый прыжок не может быть меньше 1 фута; мальчик *A* начинает игру; *B* прыгает с того места, на которое прыгнул *A*; последний прыгает с того места, куда попал *B*, и т. д. Если при этом пройденное в один прыжок расстояние составляет дробное число футов, то вместо него берётся ближайшее меньшее целое число (например, вместо $5^3/_4$ берётся 5 футов). Выигравшим считается тот, кто первый достигнет конца пути.

После нескольких попыток играющие заметят, что выигрывает всегда тот, кто первый очутится на 89-м футе

[1] 1 фут — 30,48 см. (*Примеч. ред.*)

(рис. 1). Действительно, если, например, *A* достигнет 89-го фута, то расстояние, отделяющее его противника *B* от конечной цели, превосходит величину наибольшего прыжка (10 футов) на 1 фут. Поэтому *B* не может очередным прыжком достигнуть цели; с другой же стороны, по правилам игры он обязан прыгнуть не меньше чем на 1 фут. Он может попасть на 90-й, 91-й, 92-й или, в крайнем случае, на 99-й фут, но каждый раз *A* имеет возможность одним прыжком попасть на 100-й фут.



Рис. 1

Но если достижение 89-го фута обеспечивает выигрыш, то на 89-й фут попадет, очевидно, тот, кто раньше достигнет 78-го. Таким же образом, на 78-й попадает достигший 67-го и т. д. Получаем ряд чисел: 100, 89, 78, 67 ... 34, 23, 12 и, наконец, 1. На эти-то числа, разделённые промежутком в 11, должен становиться желающий выиграть. Значит, выиграть возможно и выигрывает тот, кто начинает игру. В первый прыжок он должен пройти 1 фут, в следующий — попасть на 12-й, затем на 23-й, 34-й ... 78-й, 89-й и, наконец, на 100-й.

Очевидно, игра эта может быть видоизменена: можно, например, взять иную длину пути или же иные численные значения для максимальных и минимальных прыжков. Числа, на которые должен становиться выигрывающий, отделены друг от друга промежутком, равным сумме чисел, выражающих максимальный и минимальный прыжок (в нашем случае 10 + 1 = 11). Если длина пути случайно окажется кратным упомянутого промежутка, то выигрыш будет обеспечен уже не за первым (*A*), а за вторым (*B*) игроком. Например, если длина пути равна 99 футам, а остальные условия

прежние, то, как бы *A* ни начал, *B* первым прыжком может попасть на 11; вторым на 22... девятым на 99 и, следовательно, должен выиграть.

Вопрос 1. Длина пути равна 200 футам; остальные условия прежние. *A* ошибочно рассчитал, что для выигрыша он должен, как и прежде, попасть на 1; как должен *B* продолжать игру, чтобы выиграть?

Вопрос 2. Кто выиграет, если максимальный прыжок для каждого определён в 8 футов, минимальный — в 1 фут, длина пути 90 футов, и как должен поступать выигрывающий?

Вопрос 3. Кто выиграет, если максимальный прыжок составляет 17 дециметров, минимальный 1 дециметр, а длина пути равна 15 метрам?

Вопрос 4. Кто выиграет, если максимальный прыжок составляет 10 футов, минимальный 3 фута и длина пути равна 182 футам?

Вопрос 5. Максимальный прыжок определён в 9 футов, минимальный — в 2; длина пути равна 100 футам. Выигравшим считается тот, кто заставит противника достигнуть конца пути (100) или перепрыгнуть через этот конец[1]. Кто из играющих окажется выигравшим?

---

[1] В этом случае не делается различия между достижением цели и переходом за неё, между тем, как, например, в 4-м вопросе, различие это имеет существенное значение.

Глава II
ИГРА В ПЯТНАДЦАТЬ

§ 1. ИСТОРИЯ И ОПИСАНИЕ ИГРЫ

В 80-х годах XIX столетия в Германии получила широкое распространение «Игра в пятнадцать». На рис. 2 изображён в уменьшенном виде экземпляр этой игры в ящике, в котором находится 15 специально приготовленных квадратных костяшек.

Впервые игра эта появилась в Америке в 1878 г. Говорят, её остроумный изобретатель был известен в шахматном мире как выдающийся составитель задач. Сразу же после появления игра распространилась во всех цивилизованных странах английской культуры под названием «Fifteenth Puzzle» («Игры в 15»), германской культуры — «Boss Puzzle» («Игры Босса») и у французов под названием «Jeu du taquin» («Такен»).

С первого же года в неё стали играть с большим азартом, никакая игра до той поры не пользовалась подобным успехом. Говорят, в Гамбурге даже у пассажиров дилижансов можно было видеть небольшие ящички с 15 костяшками. Хозяева торговых контор приходили в отчаяние от увлечения служащих этой игрой и принуждены были вывесить объявления с запрещением играть в неё в рабочие часы. Устраивались турниры этой игры и т. п. Даже в зале Рейхстага, как рассказывает Зигмунт Гюнтер, выдающийся географ,

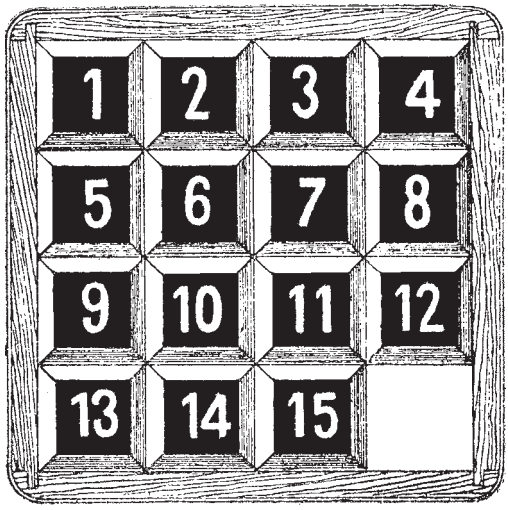


Рис. 2

математик и либеральный политик, можно было видеть депутатов, которые, слушая речи, одновременно развлекались этой игрой.

Игра состоит в следующем: *15 квадратных костяшек, пронумерованных цифрами от 1 до 15, расположены в произвольном порядке в квадратном ящичке. 16-е место ящичка остаётся свободным. Требуется последовательным передвижением костяшек на пустое место с мест смежных расположить их в порядке, указанном на рис. 2*[1].

Как увидим дальше, во многих случаях невозможно достигнуть указанного, так называемого нормального расположения костяшек; в таких случаях мы будем на-

[1] В современное данному изданию (начало XXI века) время стал популярным вариант этой игры, когда вместо расположения цифр в определённом порядке требуется сложить определённую картинку, «разрезанную» по квадратикам. Такие игры чаще всего не позволяют вынимать квадратики из поля, из-за чего игру невозможно привести в «неразрешимое» положение. (*Примеч. ред.*)

зывать задачу неразрешимой. Возможность или невозможность решения зависит исключительно от первоначального расположения костяшек. Как же узнать по расположению костяшек, разрешима или неразрешима задача, и как, в первом случае, решить её?

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Прежде чем ответить на эти вопросы, условимся различать места, или клетки, ящичка, обозначая их номерами, соответствующими рис. 2 (от 1 до 16). Например, место 4 постоянно обозначает клетку, которую на рис. 2 (т. е. при нормальном расположении костяшек) занимает костяшка с номером 4, а место 16 — нижнюю клетку справа, которая на рис. 2 остаётся свободной. Далее горизонтальные ряды клеток будем называть строками, а вертикальные — столбцами; будем различать первую, вторую, третью и четвёртую строки, считая сверху вниз; столбцы также будем именовать первый, второй, третий, четвёртый, считая слева направо.

Возьмём случайное расположение костяшек и попытаемся, посредством передвижений, получить их нормальное расположение (рис. 2). Будем поступать следующим образом: положим костяшку 1 на место 1 (если только она случайно не находится уже там) и затем, не трогая костяшки 1, поставим костяшку 2 на место 2. Нетрудно убедиться, что этого легко достичь сравнительно небольшим числом ходов. Тогда, не трогая первой строки, можно передвинуть костяшки 3 и 4 в клетки 3-го и 4-го столбцов, если, конечно, костяшки эти раньше не находились в них. Во всяком случае, мы должны допустить, что костяшки 3 и 4 могут быть так или иначе передвинуты на места, находящиеся в последних двух столбцах, и что одновременно

в этих столбцах может оказаться и свободное место. Если костяшки 3 и 4 случайно не оказались на нужных местах, мы можем привести их туда исключительно путём передвижений внутри восьмиклеточного поля последних двух столбцов. Нет необходимости рассматривать эти ходы для всех возможных случаев, достаточно остановиться на наиболее неблагоприятном, когда костяшка 3 находится на месте 4, а костяшка 4 — на месте 3. Пусть наше восьмиклеточное поле двух последних столбцов имеет расположение, указанное на рис. 3.

При всех ходах костяшек, при расположении, указанном на рис. 3, мы не будем трогать 6-ю и 14-ю костяшки, так как в них нет необходимости; таким образом, мы ограничиваем себя шестью клетками, что не помешает нам достичь цели. Если бы мы пожелали ограничиться четырьмя верхними клетками, из которых одна свободна, мы не могли бы достичь цели (дальше мы ещё к этому вернёмся), т. е. не могли бы привести костяшки 3 и 4 на нормальные места. От расположения костяшек на рис. 3 легко перейти к расположению их как на рис. 4, если все пять костяшек шестиклеточного поля дважды, а 5-ю костяшку даже трижды передвинуть против часовой стрелки.

Передвижением костяшек, находящихся в четырёх средних клетках, легко перейти от расположения костяшек на рис. 4 к расположению на рис. 5. Теперь передвинем все пять костяшек верхнего шестиклеточного поля по часовой стрелке так, чтобы костяшка 4 очутилась на месте 3. Получим расположение костяшек как на рис. 6, а затем, передвигая костяшки внутри четырёх средних клеток, поставим костяшку 3 на место 7 (рис. 7). Последнее расположение костяшек 3 и 4 (рис. 7) является типичным.

Итак, рассмотрев этот особенно неблагоприятный случай, мы видим, что расположение костяшек на

4	3
12	8
5	
6	14

Рис. 3

8	5
3	
4	12
6	14

Рис. 4

8	5
4	3
12	
6	14

Рис. 5

4	8
12	5
	3
6	14

Рис. 6

4	8
3	
5	12
6	14

Рис. 7

рис. 7 всегда достижимо; отсюда легко получить такое расположение, при котором костяшка 4 займёт место 4 и костяшка 3 — место 3. Следовательно, первая строчка ящичка приведена в нормальный порядок, и её мы больше трогать не будем.

Существенным в этом приёме было то, что у нас было шестиклеточное поле с одной свободной клеткой, благодаря чему мы имели возможность не только передвигать последовательно пять костяшек в этом поле, но и три костяшки среднего четырёхклеточного поля (внутри названного шестиклеточного) с одной свободной клеткой. Лишь сочетанием этих двух видов передвижений возможно было достичь существенных изменений в расположении костяшек. Если ограничиться исключительно четырёхклеточным полем, то после всех возможных ходов картина, по существу, осталась бы прежняя.

Таким же путём можно привести в нормальный порядок и *вторую* строку; при этом все ходы выполняются лишь в последних трёх строках, костяшки же первой строки остаются на месте, и достигнутый там нормальный порядок не нарушается. Прежде всего легко передвинуть костяшки 5 и 6 на их нормальные места (на 5 и 6 — рис. 2); затем в шестиклеточном поле костяшки 7, 8, 11, 12, 15, 16 (рис. 2) совершают передвижения, подобные ходам, изображённым на рис. 3—7. Здесь мы можем применить рассуждения,

применённые выше к рис. 3—7; правда, мы теперь имеем лишь шестиклеточное поле, но выше мы сами себя ограничили им и убедились, что этого вполне достаточно. Таким образом, указанным на рис. 3—7 способом можно привести костяшки 7 и 8 на нормальные места и тем достигнуть в верхних двух строках правильного расположения.

В последних двух строках прежде всего передвигают костяшку 13 на место 9 и костяшку 9 на место 10, аналогично тому, как мы раньше передвинули 3 и 1 (рис. 7) и получили типичное расположение; но теперь придётся оперировать в двух последних *строках,* в то время как выше мы имели дело с двумя последними *столбцами.* Затем переводят костяшки 13 и 9 на их нормальные места. Теперь остаётся шестиклеточное поле с местами 10, 11, 12, 14, 15, 16; после передвижения изложенным способом костяшек 10 и 14 на их нормальные места у нас останется лишь четырёхклеточное поле с костяшками 11, 12, 15 и со свободной клеткой. Передвигая эти костяшки, можно привести костяшку 15 на её нормальное место, и свободным останется место 16. Костяшки 11 и 12 могут оказаться либо на их нормальных местах, либо костяшка 12 на месте 11, а костяшка 11 — на месте 12. В первом случае задача решена; во втором — имеем расположение как на рис. 8. Итак, мы пришли к следующему выводу:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	11
13	14	15	

Рис. 8

Из случайного первоначального расположения костяшек можно прийти либо к нормальному, либо к расположению, указанному на рис. 8.

На вопрос, возможно ли от первоначального расположения перейти, по желанию, и к нормальному, и к расположению на рис. 8, мы пока ответа не дадим, а ограничимся указанием, что *в каждом* случае одно из указанных расположений достижимо.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИГРЫ

Будем исходить из определённого первоначального расположения (рис. 9). Будем читать цифры этой фигуры в порядке, которого мы и раньше придерживались, т. е. в каждой строке — слева направо, а строки — сверху вниз. Мы видим, что костяшка 1 занимает своё нормальное место. Следующая же за ней костяшка 4 находится, как будем говорить, *до* двух костяшек, которые при нормальном расположении находились бы раньше неё, — мы имеем в виду костяшки 3 и 2. Будем говорить, что костяшка 4 даёт два отступления относительно нормального порядка. Таким же образом костяшка 7, стоящая *до* костяшек 3, 5, 2, 6, имеет четыре отступления; костяшка 13, стоящая *до* костяшек 11, 10, 2, 12, 6, имеет пять отступлений и т. д. Для всего ящика мы имеем, таким образом:

1	4	7	9
3	5	8	14
15	13	11	10
2	12	6	

Рис. 9

0 + 2 + 4 + 5 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 5 + 3 + 2 + 0 + + 1 = 38 отступлений относительно нормального порядка. Эта общая сумма отступлений даёт возможность усмотреть, достижимо ли нормальное расположение рис. 2 или нет: именно, если общее число отступлений чётное (в нашем случае 38), то возможно получить нормальное расположение костяшек — задача разрешима. Напротив, если общее число отступлений нечётное, то нормальное расположение не получается — задача неразрешима. При этом предполагается, что свободное место находится внизу справа, т. е. в клетке 16. Вместо громоздкого выражения «отступление от нормального расположения» будем в дальнейшем употреблять принятый в математике термин «инверсия»[1]. Условие для возможности решения задачи, данное выше без доказательств, мы можем теперь выразить следующим образом:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы от данного расположения костяшек со свободным местом 16 можно было перейти к нормальному (рис. 2), является то, чтобы общее число всех инверсий данного расположения было чётным.

Чтобы убедиться в верности сказанного, поставим вопрос: как изменяется общее число всех инверсий от передвижения 1 костяшки на свободное место? Ответ весьма прост: когда костяшка передвигается в горизонтальном направлении, число инверсий от такого передвижения не меняется. Что произойдёт, когда костяшка передвигается в вертикальном направлении? Такое передвижение обозначает, что костяшка отодвигается назад или вперёд на три места, в зависимости от того, переводят ли её вверх или вниз. Пусть пере-

[1] В современной математике термин «инверсия» определяет разные понятия в разных частях, или разделах, математики. Используемое здесь значение термина характерно для области математики, называемой комбинаторикой. (*Примеч. ред.*)

двигаемая костяшка имеет номер x, а три костяшки, через которые она как бы перепрыгивает, — номера a, b, c (a, b, c и x — числа в пределах от 1 до 15). Тогда могут представиться такие случаи:

1) x больше каждого из чисел a, b, c;

2) x меньше каждого из чисел a, b, c;

3) x больше двух чисел из a, b, c и меньше третьего;

4) x больше одного из числа a, b, c и меньше двух остальных.

В первом случае, когда костяшка x становится раньше костяшек a, b, c, число инверсий увеличивается на 3; когда же костяшка x становится позади костяшек a, b, c, отпадают три инверсии. Таким образом, в первом случае, от передвижения костяшки x число инверсий меняется — либо увеличивается на 3, либо уменьшается на 3.

Второй случай сходен с первым: здесь также общее число инверсий либо увеличивается, либо уменьшается на 3.

В третьем случае, когда костяшка x становится раньше костяшек a, b, c, число инверсий, во-первых, увеличивается на 2, так как x оказывается раньше двух чисел, меньших его; во-вторых, оно уменьшается на 1, так как x оказывается перед числом, большим его. В итоге общее число инверсий увеличивается на 1. Когда x становится впереди костяшек a, b, c, общее число инверсий уменьшается на 1. Итак, в третьем случае общее число инверсий изменяется на 1.

В четвёртом случае число инверсий также изменяется на 1. Следовательно, от передвижения костяшки в вертикальном направлении число инверсий меняется или на 3, или на 1, т. е. увеличивается или уменьшается на одно из этих чисел. Полученный результат выразим так:

Горизонтальное передвижение костяшки не изменяет общего числа инверсий, вертикальное — изменяет его на нечётное число (на 1 или на 3).

Предположим, что на свободном месте находится воображаемая костяшка с номером 16. В таком случае мы можем сказать, что каждый отдельный ход, т. е. передвижение костяшки на соседнее свободное место, равносилен замене воображаемой костяшки 16 действительно передвигаемой костяшкой. Если костяшка 16, как было предположено, находится в клетке 16, то, чтобы к концу игры она оказалась на том же месте, необходимо, чтобы число таких замен было чётное; в самом деле, каждый ход — в горизонтальном или вертикальном направлении — должен как бы уничтожиться другим ходом в противоположном направлении, лишь тогда костяшка 16 вернётся на своё прежнее место. *Число ходов, необходимое для перехода от одного расположения к другому с той же самой свободной клеткой, должно быть чётным; и очевидно, число горизонтальных ходов, как и вертикальных, взятое само по себе, тоже должно быть чётным.*

Подведём итоги. От первоначального расположения костяшек со свободным местом 16 можно перейти к конечному расположению, с тем же свободным местом, путём чётного числа горизонтальных и вертикальных ходов. Первые не меняют числа инверсий; вторые, напротив, меняют их *каждый раз* на нечётное число, так что в конечном счёте — ввиду того что число вертикальных ходов чётное, — общее число инверсий изменяется *на чётное* число. Первоначальное расположение костяшек со свободной клеткой 16 можно привести и к любому другому с тем же свободным местом, но лишь в том случае, когда общее количество инверсий одного отличается от общего количества другого на *чётное* число. Этот переход безусловно невозможен, когда разность между числами инверсий *нечётная*. Общее же число инверсий нормального расположения (рис. 2) равно нулю. Число инверсий для расположения на рис. 8 равно 1 (костяшка 12 стоит

впереди костяшки 11). Отсюда, между прочим, следует, что расположение на рис. 8 не может быть приведено к нормальному и что, обратно, нормальное расположение не может быть приведено к расположению на рис. 8. Легко усмотреть, что всякое расположение может быть приведено к нормальному только в том случае, когда общая сумма инверсий — число *чётное*. Последнее условие является *необходимым* для перехода к нормальному расположению; оно является и условием *достаточным*. В самом деле, из предыдущего следует, что всякое первоначальное расположение с чётным числом инверсий *не* может быть приведено к расположению на рис. 8 (с нечётным числом инверсий). Выше же было показано, что каждое расположение приводится либо к нормальному (рис. 2), либо к расположению рис. 8; поэтому данное расположение с чётным числом инверсий *всегда* можно привести к нормальному виду. С другой стороны, расположения с нечётным числом инверсий всегда могут быть приведены к расположению на рис. 8; к нормальному же они приведены быть не могут; но одно из конечных расположений для них всегда достижимо. Во всех так называемых неразрешимых случаях расположение на рис. 8 — и только оно одно — всегда возможно. Этим данное выше правило доказано в полном объёме, и вопрос, оставленный в конце § 2 открытым, получил ответ, а именно: никогда одно и то же расположение не может быть приведено, по желанию, и к нормальному, и к расположению на рис. 8, но лишь к одному из них.

Расположения, при которых задача становится неразрешимой, могут объяснить тот исключительный интерес, который «Игра в пятнадцать» вызвала при своём появлении. Игрок, которому более или менее легко давались разрешимые случаи, не зная теории игры, думал, что и в других случаях, при настойчивости и усердии, он в конце концов решит задачу.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 3

Введение 5

Глава I. ПРЫГАНЬЕ ВЗАПУСКИ 10

Глава II. ИГРА В ПЯТНАДЦАТЬ 13
§ 1. История и описание игры 13
§ 2. Решение задачи 15
§ 3. Математическая теория игры 19

Глава III. СОЛИТЕР 27
§ 1. Правила игры. Обозначения 27
§ 2. Задача с незаполненной доской 30
§ 3. Игра с заполненной доской 32
§ 4. Теория игры 35

Глава IV. УДВОЕНИЯ 40
§ 1. Ряд степеней числа 2 40
§ 2. Особое применение ряда степеней числа 2 42
§ 3. Отгадывание задуманных чисел и предметов 45
I. Отгадывание задуманного числа 46
II. Отгадывание задуманной картинки 47
§ 4. Башня Люка 49

Глава V. МЕЛЕДА 54

Глава VI. НИМ 61
§ 1. Описание игры и краткое изложение её теории 61

§ 2. Обоснование теории игры 64
§ 3. Техника игры 73

Глава VII. ХОД КОНЯ 76
§ 1. Определение. История. Предварительные замечания 76
§ 2. Примеры хода коня 78
§ 3. Некоторые приёмы образования ходов коня 81
§ 4. Магические ходы коня 89

Глава VIII. МАГИЧЕСКИЕ КВАДРАТЫ 91
§ 1. Введение 91
§ 2. Девятиклеточный магический квадрат 93
§ 3. Общий метод образования магического квадрата с нечётным числом клеток 96
§ 4. Квадраты с чётным числом клеток 103
§ 5. Магические квадраты на амулетах 109

Глава IX. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОФИЗМЫ 116
I. Половина равна целому 116
II. Все числа равны между собой 117
III. Все числа равны между собой. Второе доказательство 118
IV. Ноль больше любого числа 121
V. Если число p меньше другого q, то $n \times p < q$ при любом чётном n 122
VI. Четверть больше половины 123
VII. В математике нет мнимых чисел, а только вещественные 123
VIII. Существуют треугольники с двумя прямыми углами и одним острым 124
IX. Все треугольники равнобедренны 125
X. $65 = 64 = 63$ 127
XI. Сумма параллельных сторон трапеции равна нулю 129
XII. Все окружности имеют одинаковую длину 130
XIII. Внутри круга имеется только одна точка, а именно центр. Все остальные точки, кажущиеся нам внутренними, на самом деле лежат на окружности 131
XIV. Ахиллес и черепаха 133
XV. Из теории вероятности 134

Ответы на вопросы 136
Глава I 136
Глава II. 137
Глава III 137
Глава IV 138
Глава V 138
Глава VI 139
Глава VII 140
Глава VIII. 141
Глава IX. Раскрытие софизмов 143