

Московский
педагогический
государственный
университет

О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Москва
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Часть 1

МПГУ
Москва • 2016

УДК 517 (07)
ББК 22.161я73
Б953

Рецензенты:

А. В. Латышев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и геометрии Московского государственного областного университета (МГОУ)

Е. М. Матвеев, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета (МПГУ)

Быкова, Ольга Николаевна.

Б953 Математический анализ : Учебное пособие / О. Н. Быкова, С. Ю. Колягин. – Часть 1. – Москва : МПГУ, 2016. – 120 с.

ISBN 978-5-4263-0391-1

Предлагаемое учебное пособие включает в себя теоретический материал дисциплины «Математический анализ», читаемый, как правило, в первом семестре на математических и физико-математических факультетах педвузов. Это разделы «Действительные числа», «Предел последовательности», «Предел функции», «Непрерывность функции» и «Элементарные функции и их свойства».

Учебное пособие адресовано в первую очередь студентам математических и физико-математических факультетов высших педагогических учебных заведений, обучающихся по направлению бакалавриата 01.03.01 – Математика (профиль «Преподавание математики и информатики»), а также будет полезно как студентам, обучающимся по направлению бакалавриата 44.03.05 – Педагогическое образование (профили «Математика и информатика», «Математика и экономика»), так и всем, самостоятельно изучающим курс математического анализа.

Учебное пособие полностью соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту профессионального образования (ФГОС ПО) и рабочим программам по указанным направлениям бакалавриата и их различным профилям.

УДК 517 (07)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-4263-0391-1

© МПГУ, 2016
© Быкова О. Н., Колягин С. Ю., текст, 2016

Содержание

Предисловие……..……..….. 4

Глава 1. Действительные числа 5

§1. Аксиоматическое определение множества действительных чисел …… 5

§2. Множество натуральных чисел ……..... 8

§3. Множества рациональных и иррациональных чисел ……..…… 11

§4. Модуль действительного числа и его свойства ……..……. 17

§5. Расширенное множество действительных чисел. Промежутки на числовой прямой. Окрестности точек …….. 19

§6. Ограниченные и неограниченные числовые множества. Верхняя и нижняя границы числового множества ……..... 22

§7. Верхняя и нижняя грани числового множества …… 24

§8. Функции действительного переменного ……... 33

Глава 2. Предел последовательности 42

§1. Определение предела последовательности. Основные свойства ……. 42

§2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности ……..... 50

§3. Монотонные последовательности. Теорема о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число Непера …… 53

§4. Теорема Кантора о вложенных отрезках ……... 57

§5. Подпоследовательность. Теорема Больцано – Вейерштрасса…….... 60

Глава 3. Предел функции 66

§1. Предельная точка множества ……. 66

§2. Определения предела функции ……..……..… 67

§3. Основные теоремы о пределах ……... 72

§4. Односторонние пределы. Их связь с пределом функции…… 83

§5. Предел по множеству ……. 84

Глава 4. Непрерывность функции 86

§1. Определение непрерывной в точке функции ……..... 86

§2. Локальные свойства непрерывных функций (свойства функций, непрерывных в точке) …… 87

§3. Односторонняя непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация …… 90

§4. Свойства функций, непрерывных на отрезке …… 93

§5. Равномерная непрерывность функции на множестве ……..…… 95

Глава 5. Элементарные функции и их свойства 98

§1. Степенная функция с натуральным показателем …… 98

§2. Степенная функция с целым отрицательным показателем ……..… 99

§3. Степенная функция с показателем вида $\frac{1}{n}$ $\left(n \in \mathbb{N}\right)$ ……..... 100

§4. Степенная функция с рациональным показателем ……... 102

§5. Показательная функция ..……...……...…… 103

§6. Логарифмическая функция ……. 107

§7. Степенная функция с действительным показателем …… 109
§8. Тригонометрические функции ……... 111
§9. Обратные тригонометрические функции ……... 114
§10. Элементарные функции …… 117
§11. Пределы, связанные с числом *e* …… 117
Литература……..…… 119

Предисловие

Учебная дисциплина «Математический анализ» является одной из базовых дисциплин в образовательной программе подготовки учителя математики. Курс математического анализа изучается студентами, как правило, на I–III курсах в течение шести учебных семестров. Предлагаемое учебное пособие отражает теоретический материал первого семестра обучения.

Учебное пособие адресовано в первую очередь студентам математических и физико-математических факультетов высших педагогических учебных заведений, обучающимся по направлению бакалавриата 01.03.01 – Математика (профиль «Преподавание математики и информатики»), а также будет полезно студентам, обучающимся по направлению бакалавриата 440305 – Педагогическое образование (профили «Математика и информатика», «Математика и экономика», «Информатика и математика»).

Учебное пособие полностью соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту профессионального образования (ФГОС ПО) и рабочим программам по указанным направлениям и их различным профилям.

Учебное пособие написано на основе лекций, которые на протяжении многих лет авторы читали на математическом факультете Московского педагогического государственного университета (МПГУ). Авторы искренне надеются, что данное учебное пособие окажется полезным как студентам высших педагогических учебных заведений РФ, так и всем, самостоятельно изучающим курс математического анализа.

Все пожелания и замечания по данному учебному пособию авторами с благодарностью будут приняты. Их можно присылать на кафедру математического анализа МПГУ (107140, Москва, ул. Краснопрудная, д. 14), в том числе по электронной почте: kafmatanmpgu@mail.ru.

Глава 1. Действительные числа

§1. Аксиоматическое определение множества действительных чисел

Определение. *Множеством действительных чисел* $\mathbb{R}$ называется множество, если для его элементов выполняются аксиомы, перечисленные ниже.

I. Аксиомы сложения. Каждой паре $(x;y)$ элементов множества $\mathbb{R}$ соответствует однозначно определённый элемент множества $\mathbb{R}$, который называют суммой элементов x и y и обозначают $x+y$. При этом операция $(x;y)\mapsto x+y$, называемая *сложением*, удовлетворяет следующим аксиомам:

1) *коммутативность*: $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad x+y=y+x$;

2) *ассоциативность*: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad (x+y)+z=x+(y+z)$;

3) *существование нейтрального элемента*, который называют *нулём* и обозначают символом 0, такой, что $\forall x\in\mathbb{R}\quad x+0=x$;

4) *существование обратного элемента*, т.е. для каждого x из $\mathbb{R}$ существует элемент, который называют *противоположным* числом для x и обозначают $-x$, такой, что $x+(-x)=0$.

II. Аксиомы умножения. Каждой паре $(x;y)$ элементов множества $\mathbb{R}$ соответствует однозначно определённый элемент множества $\mathbb{R}$, который называют произведением элементов x и y и обозначают $x\cdot y$ или xy. При этом операция $(x;y)\mapsto x\cdot y$, называемая *умножением*, удовлетворяет следующим аксиомам:

1) *коммутативность*: $\forall x,y\in\mathbb{R}\quad xy=yx$;

2) *ассоциативность*: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad (xy)z=x(yz)$;

3) *существование нейтрального элемента*, называемого *единицей* и обозначаемого символом 1, такой, что $\forall x\in\mathbb{R}\quad x\cdot 1=x$;

4) *существование обратного элемента*, т.е. для каждого x из $\mathbb{R}$, отличного от нуля, существует элемент, который называют *обратным* числом к x и обозначают x^{-1} или $\frac{1}{x}$, такой, что $x \cdot \frac{1}{x} = 1$;

5) *дистрибутивность умножения относительно сложения* (аксиома, связывающая сложение с умножением): $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x+y)z = xz + yz$.

III. Аксиомы порядка: Любые два элемента x и y из $\mathbb{R}$ связаны отношением порядка, называемым *меньше или равно* и обозначаемым $\leq$, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) *рефлексивность*: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$;

2) *антисимметричность*: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$;

3) *транзитивность*: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$;

4) *линейность*: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \vee y \leq x$;

5) *связь со сложением*: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$;

6) *связь с умножением*: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$.

IV. Аксиома непрерывности. Пусть A и B – непустые числовые множества, такие, что $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$ имеет место $a \leq b$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$, такое, что $\forall a \in A$ и $\forall b \in B$ $a \leq c \leq b$.

Замечание. Если каждый элемент множества $A(\subset \mathbb{R})$ не превосходит каждого элемента множества $B(\subset \mathbb{R})$, то можно писать $A \leq B$, а если каждый элемент множества $A(\subset \mathbb{R})$ не превосходит числа $c(\in \mathbb{R})$, то пишут $A \leq c$. Аналогично запись $c \leq B$ означает, что число c не превосходит каждого элемента множества B. В связи с этим **аксиому непрерывности** можно переформулировать так:

если A и B – непустые числовые множества и $A \leq B$, то существует $c \in \mathbb{R}$, такое, что $A \leq c \leq B$.

Итак, множеством действительных чисел называется множество элементов вместе с определёнными на нём операциями сложения, умножения, отношением порядка, удовлетворяющими вышеперечисленным условиям, и для которого имеет место аксиома непрерывности.

Отметим, что аксиомы I–III означают, что $\mathbb{R}$ – линейно упорядоченное поле.

Из вышеприведённой совокупности аксиом можно вывести все известные свойства действительных чисел. Например, докажем следующие три свойства.

1. Единственность противоположного элемента:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! \left(-x\right) \in \mathbb{R} \ \ x + \left(-x\right) = 0 .$$

▶ От противного. Пусть для какого-либо числа x существуют по крайней мере два противоположных элемента x_1 и x_2 (т.е. $x + x_1 = 0$ и $x + x_2 = 0$), причём $x_1 \neq x_2$.

Имеем $x_1 \overset{\text{I}_{3)}}{=} x_1 + 0 \overset{\text{I}_{4)}}{=} x_1 + \left(x + x_2\right) \overset{\text{I}_{2)}}{=} \left(x_1 + x\right) + x_2 \overset{\text{I}_{1)}}{=} \left(x + x_1\right) + x_2 \overset{\text{I}_{4)}}{=} 0 + x_2 \overset{\text{I}_{1)}}{=} x_2 + 0 \overset{\text{I}_{3)}}{=} x_2$, т.е. $x_1 = x_2$, что противоречит условию. Таким образом, предположение неверно и у любого действительного числа противоположный элемент единственен. ◀

2. $\forall x \in \mathbb{R}^* \ \ x = \left(x^{-1}\right)^{-1}$.

▶ Имеем $1 \overset{\text{II}_{4)}}{=} x \cdot x^{-1} \overset{\text{II}_{1)}}{=} x^{-1} \cdot x$, т.е. $x^{-1} \cdot x = 1$, откуда в силу II$_{4)}$ следует, что $x = \left(x^{-1}\right)^{-1}$. ◀

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ \left(x \le y \Leftrightarrow 0 \le y + \left(-x\right)\right)$.

▶ *Необходимость*: Из условия $x \le y \overset{\text{III}_{5)}}{\Rightarrow} x + \left(-x\right) \le y + \left(-x\right) \overset{\text{I}_{4)}}{\Rightarrow} 0 \le y + \left(-x\right)$.

Достаточность: Имеем $0 \le y + \left(-x\right) \overset{\text{III}_{5)}}{\Rightarrow} 0 + x \le \left(y + \left(-x\right)\right) + x \overset{\text{I}_{1)},\ \text{I}_{2)}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow x + 0 \le y + \left(\left(-x\right) + x\right) \overset{\text{I}_{3)},\ \text{I}_{1)}}{\Rightarrow} x \le y + \left(x + \left(-x\right)\right) \overset{\text{I}_{4)}}{\Rightarrow} x \le y + 0 \overset{\text{I}_{3)}}{\Rightarrow} x \le y$. ◀

На множестве $\mathbb{R}$ определяются также операции, обратные сложению и умножению, называемые *вычитанием* и *делением* и обозначаемые « – » и « : » соответственно, и отношения *больше или равно*, *меньше*, *больше*, обозначаемые соответственно « $\geq$ », « $<$ » и « $>$ ».

Так, *разностью* двух произвольных действительных чисел x и y называется такое число z, сумма которого с y равна x, т.е. $z+y=x$. Это число обозначается $x-y$, а операцию нахождения разности чисел x и y называют *вычитанием* из числа x числа y.

Итак, $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \left(x-y\right)+y=x$.

Аналогично *частным* двух произвольных действительных чисел x и y называется такое число z, произведение которого с y равно x, т.е. $zy=x$. Это число обозначается $x:y$, а операцию нахождения частного чисел x и y называют *делением* числа x на число y.

Итак, $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \left(x:y\right)\cdot y=x$.

Говорят, что действительное число x *больше или равно* действительного числа y, если число y меньше или равно числа x. При этом пишут $x\geq y$, т.е.

$$\forall x,y\in\mathbb{R}\ \ x\geq y\Rightarrow y\leq x.$$

§2. Множество натуральных чисел

Определение. Множество $E\subset\mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если оно удовлетворяет условиям: $1\in E$ и $\forall x\in\mathbb{R}\ \left(x\in E\Rightarrow x+1\in E\right)$.

Примеры. Множества $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\left[1;+\infty\right)$ – индуктивные, а множества $\mathbb{R}^*$, $\left[1;2\right]$, $\left(1;+\infty\right)$ индуктивными не являются.

Теперь рассмотрим пересечение произвольного семейства индуктивных множеств. Каждое из множеств семейства содержит единицу, следовательно, $1-$ элемент пересечения. Далее, если $x-$ элемент пересечения, то x входит в

каждое множество, а в силу индуктивности каждого множества семейства $(x+1)$ входит в каждое множество, а значит, и в пересечение. Таким образом, **пересечение любого семейства индуктивных множеств есть индуктивное множество**.

В частности, **пересечение всех индуктивных множеств является индуктивным множеством**. Очевидно, что это – меньшее из всех индуктивных множеств. Это множество называется *натуральным рядом* и обозначается $\mathbb{N}$. Его элементы называются *натуральными числами*.

Замечание. Из определения следует, что $1\in\mathbb{N}$ и $(n\in\mathbb{N}\Rightarrow n+1\in\mathbb{N})$ (в частности, $2=1+1\in\mathbb{N}$, $3=2+1\in\mathbb{N}$ и т.д., т.е. $\{1, 2, 3, \ldots\}\subset\mathbb{N}$), а также что всякое индуктивное множество E содержит множество натуральных чисел $(E\supset\mathbb{N})$.

Некоторые свойства натурального ряда

1^0. 1 – наименьший элемент в $\mathbb{N}$.

▶ Множество $[1;+\infty)$ – индуктивно, следовательно, $\mathbb{N}\subset[1;+\infty)$ как наименьшее индуктивное множество и $1\in\mathbb{N}$, значит, $\forall n\in\mathbb{N}\ \ n\geq 1$. ◀

2^0. $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\ \ (n-1)\in\mathbb{N}$.

3^0. $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ (n-1;n)\cap\mathbb{N}=\varnothing$, т.е. $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, ...\}$.

Следствие из свойств 1^0–3^0: каждое натуральное число n обладает непосредственно следующим за ним в $\mathbb{N}$ числом $(n+1)$.

Следствие из свойств 2^0–3^0: каждое натуральное число $n>1$ обладает непосредственно предшествующим ему в $\mathbb{N}$ числом $(n-1)$.

4^0. Каждое непустое подмножество множества $\mathbb{N}$ обладает наименьшим элементом, т.е. $\forall E\subset\mathbb{N}\ \ E\neq\varnothing\ \ \exists n_0\in E\ \ \forall n\in E\ \ n_0\leq n$.

Теорема (принцип математической индукции). Если $E\subset\mathbb{N}$, причём $1\in E$ и $\forall n\in\mathbb{N}\ \big(n\in E\Rightarrow(n+1)\in E\big)$, то $E=\mathbb{N}$.

▶ Множество E – индуктивно, следовательно, $\mathbb{N} \subset E$, а по условию $E \subset \mathbb{N}$. Значит, $E = \mathbb{N}$. ◀

Для доказательства свойств $\mathbb{N}$ часто используется *метод математической индукции*:

чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого n, достаточно установить, что

1) это утверждение верно при $n = 1$;

2) если утверждение справедливо для $n = k$ (k – произвольное натуральное число), то оно верно и для следующего числа $(k+1)$.

Пример. Докажем с помощью метода математической индукции справедливость неравенства Бернулли $(1+x)^n \geq 1 + nx$ для любого $x > -1$.

▶ При $n = 1$ имеем верное неравенство $1 + x \geq 1 + x$.

Предположим, что неравенство Бернулли выполняется при некотором $n = k$, т.е. $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Покажем, что тогда оно верно при $n = k+1$. Имеем: $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k (1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$.

Следовательно, согласно принципу математической индукции неравенство Бернулли верно для любого $n \in \mathbb{N}$. ◀

Замечание. Сумма, произведение, а также положительная разность двух натуральных чисел есть натуральное число.

Теперь рассмотрим множество чисел, противоположных натуральным:

$$\mathbb{N}_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

Определение. Объединение множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_-$ и одноэлементного множества $\{0\}$ называется *множеством целых чисел* и обозначается буквой $\mathbb{Z}$, т.е.

$$\mathbb{Z} \overset{def}{=} \mathbb{N} \cup \mathbb{N}_- \cup \{0\}.$$

Таким образом, $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$.

Замечание 1. Из определения следует, что $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Учебное пособие

Быкова Ольга Николаевна
Колягин Сергей Юрьевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Редактор *Дубовец В. В.*
Оформление обложки *Удовенко В. Г.*
Компьютерная верстка *Дорожкина О. Н., Потрахов И. А.*

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования МПГУ
119571, Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446.
Тел.: (499) 730-38-61
E-mail: izdat@mpgu.edu

Подписано в печать 17.10.2016. Формат 60x90/16.
Бум. офсетная. Печать цифровая. Объем 7,5 п. л.
Тираж 500 экз. Заказ № 563.

ISBN 978-5-4263-0391-1

