Московский
государственный
горный
университет

МГГУ

Л.М. Гурова
Е.В. Зайцева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Допущено Учебно-методическим объединением вузов по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 552800, 654600 «Информатика и вычислительная техника», специальности 220200 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»

Высшее горное образование

МОСКВА
ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА
2006

УДК 519.768.681.3
ББК 22.12
Г 95

Книга соответствует «Гигиеническим требованиям к изданиям книжным для взрослых. СанПиН 1.2.1253 — 03», утвержденным Главным государственным санитарным врачом России 30 марта 2003 г.

Экспертиза проведена Учебно-методическим объединением вузов по университетскому и политехническому образованию (письмо № 16-07/191 от 15.07.2005 г.)

Рецензенты:

- академик Международной академии наук информации, информационных процессов и технологий, д-р техн. наук *А.А. Садердинов* (ФГУП «Главный информационно-вычислительный центр металлургии»);
- кафедра «Автоматизированные системы обработки информации и управления » Московской государственной академии приборостроения и информатики (зав. кафедрой проф., д-р техн. наук *О.М. Петров*)

Гурова Л.М., Зайцева Е.В.

Г 95 Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. — М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2006. — 262 с.: ил.

ISBN 5-7418-0451-9 (918-5-7418-0451-3)

Изложен материал основного курса «Математическая логика и теория алгоритмов», читаемого на факультете «Автоматизации и информатики (АИ)» МГГУ: основные понятия, относящиеся к семантике формализованных логико-математических языков; математическая логика, исчисление высказываний и предикатов, элементы теории множеств, основы теории моделей и алгоритмов. Показано практическое использование алгебры к задачам математической логики.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям 552800, 654600 «Информатика и вычислительная техника», специальности 220200 «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

УДК 519.768.681.3
ББК 22.12

ISBN 5-7418-0451-9 (918-5-7418-0451-3)

ВВЕДЕНИЕ

Современная математическая логика, или символическая логика, является наукой о математических рассуждениях, использующая математические методы, при которых из верных исходных умозаключений путем применения законов человеческого мышления получают правильные результаты. Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой совершенной форме с использованием аксиоматического метода при построении формализованных математических теорий.

Предмет современной математической логики разнообразен. Это и исследование различных логических исчислений, из которых основным является классическое исчисление высказываний и предикатов, и изучение взаимосвязанных синтаксических (информационных) и семантических (реальных) объектов, и разработки в области теории алгоритмов.

Теория моделей, или теория алгебраических систем, как раздел математической логики возникла на стыке математической логики и алгебры. Взаимодействие методов математической логики и алгебры позволяет проводить и исследовать аксиоматизацию классов алгебраических объектов и на основании аксиоматизации судить о свойствах самих классов.

Современная математическая логика представляет собой обширный и разветвленный раздел математики. Она, конечно, полезна и для других наук, поскольку в них используются рассуждения, доказательства и т.п. В настоящее время разработаны приложения математической логики к другим разделам математики, а также к кибернетике и программированию.

Теория алгоритмов — раздел математики, изучающий общие свойства алгоритмов. Содержательные явления, приведшие к образованию понятия «алгоритм», прослеживаются в математике в течение всего времени ее существования. Однако само это понятие сформировалось лишь в XX веке в связи с вопросами о границах вычислимости. Бурное развитие математической логики и теории алгоритмов во многом обусловлено прогрессом компьютерной техники, необходимостью создания средств обработки и передачи информации, а также представления моделей на компьютерах.

В данном учебном пособии обобщены и использованы материалы многих авторов, занимающихся проблемами математической логики и теории алгоритмов. Вместе с тем, в нем впервые сделана попытка систематически изложить основные понятия, относящиеся к семантике формализованных логико-математических языков, основы математической логики, исчисления высказываний и предикатов, элементы теории множеств, основы теории моделей и алгоритмов и показать практическое использование алгебры к задачам математической логики и теории алгоритмов.

ФОРМАЛЬНАЯ АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Глава

1

1.1 ФОРМАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Формализация математических теорий состоит в формализации мыслительных процессов и процессов построения умозаключений, т.е. слияния математической теории и математической логики.

Понятия формальной аксиоматической теории возникли на рубеже XVII — XVIII веков и принадлежат великому математику Готфриду Вильгельму Лейбницу, пожелавшему заменить идеи *конкретными вычислениями* с использованием специальных символов или знаков. Это была эпоха расцвета аксиоматической теории древних греков, идущая от Аристотеля и Евклида, с методологической схемой *аксиома — доказательство — теорема — определение — доказательство — теорема —*..., выходящей за рамки геометрии и математики и оказавшей влияние на новые области философии и естествознания.

Немецкому философу и математику Г. Лейбницу принадлежит мысль сформулировать правила математического доказательства, чтобы избежать рассуждения о содержательном смысле математических выражений, т.е. создать *calculus ratiocinator* — исчисление, в котором естественные содержательные доказательства заменены формальными вычислениями с использованием символики, где представлены аксиомы, теоремы и определения математики. Такая символика была целью лейбницевского языка формул, знаменитой *characteristica universalis*.

Немецкий математик Д. Гильберт предложил свой путь преодоления трудностей в основаниях математики, базирующийся на применении аксиоматического метода, с помощью которого математические утверждения записываются в виде логических формул, некоторые из которых выделяются в качестве аксиом, а остальные логически из них выводятся. Это направление получило название *формализм*.

В работах Д. Гильберта и последователей его школы был разработан так называемый метод формализма в основаниях математики, базирующийся на применении аксиоматического метода, при использовании которого математические утверждения записываются при помощи особой символики в виде логических формул, причем некоторые из этих формул выделяются в качестве аксиом, а остальные выводятся из них логическим путем.

В рамках этого направления была достигнута следующая стадия уточнения понятия *формальной аксиоматической теории* или *формальной системы*, в результате чего оказалось возможным представить математические теории как точные математические объекты и строить общую теорию или *метатеорию*.

Процессы логического мышления заменяются манипуляциями различного рода формул по строго очерченным правилам, причем из уже построенных формул разрешается чисто механически по точно указанным схемам (рецептам) составлять новые формулы, что заменяет сознательные умозаключения, выводящие из одного предложения другое. Таким образом, математическое и логическое содержание представляет собой цепочки формул, изображающих математические и логические аксиомы, и может быть неограниченно продолжено путем механического составления новых формул.

Программа формализации была выдвинута Д. Гильбертом с целью доказательства непротиворечивости использования точных математических методов, предусматривающих процесс формализации доказательств, заменяя утверждение теории конечными последовательностями определенных знаков, а логические способы заключения — формальными правилами образования новых формально представленных высказываний из уже доказанных в рамках формальной аксиоматической теории.

Вопросы формализации аксиоматических теорий подтверждают работы Дедекинда, Кантора, Буля, Пеано, Пирса, Шрёдера и других ученых. Высокой степени точности формализация математического языка в рамках современных логических исчислений достигла в работах математиков XX века: Рассела, Гильберта, Гёделя, Чёрча, А.А. Маркова, А.И. Мальцева и др. Это было время бурного развития математической логики, формирования её новых разделов, таких как различные аксиоматические теории множеств, теория моделей и теория алгоритмов. Были выработаны несколько формализаций понятия алгоритма, созданы многие новые неклассические логические системы.

Кроме того, XX век — это период начала глубокого проникновения идей и методов математической логики в технику, процесс конструирования и создания ЭВМ, программирование, кибернетику, вычислительную математику, структурную лингвистику.

Мощное развитие логики и логического языка привело к созданию особой области математики — оснований математики, предметом изучения которой стало строение математических утверждений и математических теорий. Одной из фундаментальных идей исследований по основаниям математики является идея формализации математических теорий, т.е. последовательное проведение аксиоматического метода построения теорий.

1.2. ПОНЯТИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Определение **1.1.** *Классические формальные системы* математических теорий — это математическая модель, задающая множество дискретных объектов путем описания исходных объектов и правил построения новых за счет усовершенствования уже построенных ранее.

Под объектами понимаются символические и графические представления материальных тел, а также различных ситуаций, состояний, различных систем связей и информационных структур. Объекты формальной системы состоят из неделимых элементов различных видов, т.е. можно говорить о та́ком множестве элементов, как об алфавите системы. Число экземпляров элементов каждого вида может быть как конечным, так и бесконечным.

Любая формальная система, как и философская, основана на некоторых постулатах (аксиомах), которых обычно не менее двух.

В теореме Гёделя — Коэна, доказанной в 1931 г., утверждается: «В любой формальной системе, основанной не менее чем на двух постулатах (аксиомах), всегда найдется утверждение, которое нельзя ни доказать, ни опровергнуть».

Для каждой формальной логической системы в определенный момент времени и пространства действительна лишь абсолютная истина, которая может быть только ключевой. Так в математической логике, основанной на двух постулатах, различают истинность или ложность конкретных утверждений или высказываний. Смысл таких высказываний заключается в понятии, что не истина, то ложь.

Правила построения объектов в формальных системах математических теорий бывают двух видов:

1) «условие — действие», если построенные объекты удовлетворяют некоторым условиям, то для построенного нового объекта нужно выполнить какое-то конкретное действие;

2) «посылка — заключение», если построены объекты вида $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то объект вида A_{n+1} также считается построенным.

Формализация аксиоматической теории состоит в том, что аксиомы рассматриваются как формальные последовательности символов некоторого алфавита, а методы доказательств — как методы получения одних выражений из других с помощью операций над символами. При этом не допускается пользоваться какими-либо предложениями об объектах теории, кроме тех, которые явно сформулированы в аксиомах. Такой подход гарантирует четкость исходных утверждений и однозначность выводов. В действительности аксиомы и правила вывода стремятся выбирать таким образом, чтобы построенной с их помощью формальной теории можно было придать содержательный смысл.

Определение 1.2. *Формальные системы* называются также *исчислениями* или *дедуктивными системами*; правила формальной системы — правилами вывода; исходные объекты — аксиомами; объекты, которые можно построить из уже построенных объектов путем последовательного применения правил — выводимыми или допустимыми, а саму последовательность примененных правил называют выводом.

Правила при этом имеют вид «посылка — заключение».

В качестве классических формальных систем математических теорий обычно рассматриваются: исчисление высказываний ИВ, теория предикатов ТП и математическая теория I порядка, так называемая теория языков ТЯ, теории множеств. Основные понятия и термины, используемые в данных системах, возникли в Древней Греции.

Попытки разрешить споры и устранить противоречия среди различных философско-математических школ привели к созданию в XX веке набора правил и приемов, которые можно формально применить к любому набору высказываний математической логики.

В математических теориях, в которых используются теория предикатов, языков и исчисления высказываний, понятия кванторных операций, необходимым становится применение аксиоматического метода, базирующегося на простых отношениях между символами и выражениями точных формальных языков.

Имеются и другие доводы в пользу аксиоматического метода:

1) в частности он базируется на простых отношениях между символами и выражениями точных формальных языков;

2) использует достаточно простые методы математической логики.

Эти два обстоятельства обеспечивают надежность аксиоматического метода.

Определение 1.3. Под *аксиоматической теорией*, построенной на основе системы аксиом, понимается совокупность всех теорем, доказываемых исходя из данной системы аксиом. Они подразделяются на формальные и неформальные.

Неформальные аксиоматические теории наполнены теоретико-множественным содержанием, понятие выводимости в них довольно расплывчато и опирается в основном на здравый смысл.

Дальнейший шаг на пути изучения аксиоматических теорий состоит в отходе этих теорий от содержательности, в строгой формализации понятия правила вывода и в превращении самих теорий в объекты математического исследования.

Формальные аксиоматические теории считаются определенными, если выполнены следующие условия:

1) задан язык теории;

2) определено понятие формулы в этой теории;

3) выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами;

4) определены правила вывода в этой теории.

*Яз*ык — это любая знаковая система. *Знак* — это условное обозначение некоторого предмета, свойства, отношения или явления. *Знаковая система* — совокупность знаков, организованная определенным образом. *Семиотика* — наука, изучающая свойства знаков и знаковых систем, как формальных, так и естественных.

Особенности математического мышления объясняются особенностями математической абстракции и многообразием их взаимосвязей. Они отражаются в логической систематизации высказываний и доказательстве математических теорем.

В аксиоматическом построении математической теории предварительно выбирается некоторая система неопределяемых понятий, определяются отношения между ними. Такие понятия и отношения называются основными. Далее без доказательства принимаются основные положения рассматриваемой теории — аксиомы. Все дальнейшее содержание теории выводится логически из аксиом. Впервые аксиоматическое построение математической теории было предпринято Евклидом.

Непротиворечивость аксиоматической теории — одно из основных требований, предъявляемых к системе аксиом данной теории. Она означает, что из данной системы аксиом нельзя логическим путем вывести два противоречащих друг другу утверждения.

Доказательство непротиворечивости аксиоматических теорий можно осуществить различными методами. Одним из них является *метод моделирования или интерпретаций.*

В качестве основных понятий и отношений выбираются элементы некоторого множества и отношения между ними, а затем проверяется, будут ли выполняться для выбранных понятий и отношений аксиомы данной теории, т.е. строится модель данной теории.

Большинство интерпретаций в формальных системах строится на базе теории множеств, так называемой аксиоматической теории множеств. В формальной аксиоматической теории все аксиомы записываются формулами в некотором алфавите, и точно указываются правила вывода одних формул из других, т.е. в данную теорию как основная составляющая входит математическая логика.

Выбирая по-разному системы аксиом и правила вывода одних формул из других, получают различные синтактические логические теории, каждую из которых называют логическим исчислением, применимым в математической логике, теории множеств, исчислении высказываний, логике предикатов и других математических теориях.

Темы для самоконтроля

1. Понятие классических формальных аксиоматических систем.

2. Объекты формальной системы и правила их построения. («условие — действие», «посылка — заключение»).

3. Язык и понятие формулы формальной аксиоматической теории.

4. Аксиомы и правила вывода формальной системы.

5. Формальная аксиоматическая теория, ее постулаты и символы логических и кванторных операций.

6. Формальные и неформальные системы. Непротиворечивость аксиоматической теории, метод моделирования или интерпретаций.

7. Правила вывода и понятие формулы в формальных системах.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Глава

2

2.1 ПОНЯТИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Слово «логика» означает систематический метод рассуждений. Рассмотрим основное неопределенное понятие математической логики — это понятие высказывания.

Определение 2.1. *Высказыванием* называется любое повествовательное предложение, о котором можно однозначно сказать *истинно* оно или *ложно* в данных условиях места и времени, т.е. логическим значением любого высказывания является его *истина* или *ложь*.

Синонимами высказывания принято считать суждение и утверждение.

Истинность и ложность предложений представляют двухзначную логику: истина, обозначаемая единицей (1), и ложь, обозначаемая нулем (0).

Например, являются высказываниями предложения:

- «Мой компьютер — Pentium», «Internet — глобальная сеть» — это простые атомарные предложения, так как в них отсутствуют компоненты;
- «Мой компьютер — Pentium и у него встроенный CD-ROM» — это составное предложение, которое содержит два атомарных предложения, каждое из которых может быть истинно или ложно. Составное предложение, построенное при связке «*И*», истинно тогда, когда истинны обе составляющие его компоненты. Предложение рассматриваемого типа называется в логике *формулой,* и его истинность может быть определена с учетом истинности входящих в него компонент.

Высказывания, которые получаются из элементарных высказываний с помощью связок «*НЕ*», «*И*», «*ИЛИ*», «*ЕСЛИ ... ТО*», «*ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА*», принято называть сложными составными высказываниями или предложениями. Например:

• «Лошадь *не* автомобиль». Данное высказывание получилось из простого с помощью грамматической связки «не».

• «Пассажир войдет в автобус *и* доедет до метро». Данное высказывание состоит из двух элементарных высказываний, соединенных союзом «и».

• «*Если* студент окончит институт, то он получит диплом о высшем образовании». Высказывание состоит из двух простых высказываний: «Студент окончит институт» и «Он получит диплом о высшем образовании», объединенных с помощью грамматической связки «если ..., то».

Аналогичным образом сложные высказывания формируются из простых с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В математической логике все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, без учета внутреннего смыслового содержания, и считается, что ни одно из них не может быть одновременно истинным либо ложным. В математической логике не рассматриваются высказывания, имеющие значение, отличное от значений «истина» или «ложь», т.е. не рассматриваются числовые значения типа «количество» и «расстояние». Подобная детализация присуща для исчисления предикатов. Не рассматривается в математической логике и трехзначная логика со значениями «да», «нет», «не знаю».

Так как математическая логика — это двухзначная логика, то ответ, отличный от «да», может быть только «нет». Древние философы называли такой принцип «*законом исключенного третьего*».

Элементарные высказывания принято обозначать малыми буквами латинского алфавита (*a, b, c, d, z*, и т.п.). Истинное значение высказывания — буквой «*И*» или цифрой единица — «*1*», а ложное значение высказывания — буквой «*Л*» или цифрой ноль — «*0*».

2.2. ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Основными логическими операциями над высказываниями являются: конъюнкция, дизъюнкция, эквиваленция и отрицание.

Определение **2.2.** *Отрицанием высказывания* «*а*» называется новое высказывание «$\overline{a}$», которое является *истинным*, если высказывание «*а*» — ложно, и *ложным*, если высказывание «*а*» — истинно.

Отрицание высказывания «$\overline{a}$» читается «*не а*» или «*неверно, что а*». Логическое значение высказывания «$\overline{a}$» представлено в таблице истинности (табл. 2.1). Так как «*а*» и «$\overline{a}$» — высказывания, то отрицание высказывания «$\overline{a}$», т.е. «$\overline{\overline{a}}$» — это высказывание с двойным отрицанием «*о*». Ясно, что логические значения высказываний «$\overline{\overline{a}}$» и «*а*» совпадают, поэтому двойное отрицание можно опустить.

Например, «Автомобиль оснащен двигателем». Отрицанием данного высказывания будет новое высказывание: «Автомобиль не оснащен двигателем». Двойное отрицание позволит получить третье высказывание: «Не верно, что автомобиль не оснащен двигателем».

Определение **2.3.** *Конъюнкцией* двух высказываний «*а*» и «*в*» называется новое высказывание, которое считается *истинным*, если оба высказывания «*а, в*» истинны, и *ложным*, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция обозначается символом (& или $\wedge$) «$a \& b$» или «$a \wedge в$» и читается «*а* и *в*». Высказывания «*а* и *в*» являются членами конъюнкции. Конъюнкцию иногда называют логическим умножением.

Таблица 2.1

a	$\overline{a}$
1	0
0	1

Логическое значение конъюнкции при различных сочетаниях высказываний *а* и *в* представлено в таблице истинности для основных математических операций (табл. 2.2).

Например, два высказывания «Число 15 делится на 3» и «Число 15 делится на 5». Конъюнкцией этих двух высказываний будет новое высказывание: «Число 15 делится на 3 и 5», которое истинно.

Из определения понятия конъюнкция следует, что союз «и» в математической логике имеет смысловое содержание, аналогичное понятию в разговорной речи. Однако, в математической логике союзом «и» могут быть объединены различные по смысловому содержанию элементарные высказывания.

Конъюнкция нескольких высказываний истинна, только если все они истинны.

Например, «Чтобы успешно сдать экзамен, нужно знать предмет, правильно ответить на вопросы и решить задачу». В данном примере для успешной сдачи экзамена нужно выполнить все три условия одновременно:

1) знать предмет;
2) правильно ответить на вопросы;
3) решить задачу.

Из определения операций конъюнкции и отрицания следует, что высказывание $a \& \bar{a} \equiv 0$ всегда ложно.

Определение 2.4. *Дизъюнкцией* двух высказываний «*а*» и «*в*» называется новое высказывание, которое считается *истинным*, если хотя бы одно из высказываний «*а*», «*в*» истинно, и *ложным*, если они оба ложны.

Дизъюнкция обозначается символом (∨) «a»∨«b» и читается «*а*» или «*в*». Высказывания «*а*», «*в*» являются членами дизъюнкции. Логическое значение дизъюнкции представлено в таблице истинности (см. табл. 2.2).

Дизъюнкцию часто называют логическим сложением.

Например, составное высказывание «Мы поедем в гости вечером или останемся дома» истинно, так как обязательно одно из высказываний «мы поедем в гости вечером» или «останемся дома» будет истинно.

Таблица 2.2

Таблица истинности для основных МатеМатических операций

Переменные		Логические операции			
		конъюнкция	дизъюнкция	импликация	эквиваленция
а	*в*	$a \& в$	$a \vee в$	$a \to в$	$a \leftrightarrow в$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

В математической логике в отличие от обычной разговорной речи союз «или» употребляется только в не исключающем смысле.

Для операции дизъюнкции или объединения истинного и ложного высказываний, обобщенное высказывание всегда истинно:

$$a \vee \overline{a} \equiv 1 .$$

Определение 2.5. *Импликацией* (следованием) двух высказываний «*а*» и «*в*» называется новое высказывание, которое считается *ложным*, если «*а*» — истинно, а «*в*» — ложно, и *истинным* во всех остальных случаях.

Импликация обозначается символом (→) «$a \to b$» и читается «*если а, то в*» или «*из а следует в*». Высказывание «*а*» называется условием или посылкой, а высказывание «*в*» — следствием или заключением. Логическое значение импликации представлено в таблице истинности (см. табл. 2.2).

Например, составное высказывание «Если число 18 делится на 9, то оно делится на 2» истинно, так как в данном случае истинны и два составляющих элементарных высказывания, т.е. истинна посылка: «если число 18 делится на 9», и истинно заключение: «то число 18 делится на 2».

Импликация играет важную роль при математических доказательствах, так как многие теоремы формируются в условной форме, т.е. в виде утверждения аксиомы для посылки, то допустимо делать вывод, если истинна посылка, то истинно и заключение.

Определение 2.6. *Эквиваленцией* (или эквивалентностью) двух высказываний «*а*», «*в*» называется новое высказывание, которое считается *истинным*, когда оба высказывания «*а*», «*в*» одновременно истинны или ложны, и *ложным* во всех остальных случаях.

Эквиваленция обозначается знаком ($\leftrightarrow$) «$a \leftrightarrow b$» и читается «*для того чтобы а, необходимо и достаточно, чтобы в*» или «*а тогда и только тогда, когда в*». Логическое значение эквиваленции представлено в таблице истинности (см. табл. 2.2).

Пример высказывания на эквивалентность: «Для того, чтобы стать руководителем предприятия, необходимо и достаточно иметь опыт административно-управленческой работы» или «Для того, чтобы иметь опыт административно-управленческой работы, необходимо и достаточно стать руководителем предприятия».

Эквивалентность также как импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как значительное число теорем формулируются в виде необходимых и достаточных условий, как и эквивалентность.

Зная об истинности или ложности одного из членов эквивалентности, можно судить об истинности или ложности второго ее члена.

Также на основе эквивалентности производятся доказательства «методом от противного» в формальных системах: в исчислении высказываний и исчислении предикатов.

2.3. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Определение 2.7. *Формулой* алгебры логики является любое сложное высказывание, полученное из элементарных высказываний путем применения логических операций: конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания.

Формулы алгебры логики принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C и т.п., при этом порядок выполнения операций определяется наличием скобок и в соответствии с приоритетом выполняемых операций.

Для упрощения записи формул существует возможность опускать скобки, если это не меняет логический смысл формулы, по следующим правилам: сначала выполняется конъюнкция, затем дизъюнкции, затем импликация и эквивалентность вне зависимости от места их расположения. При наличии над всей формулой знака отрицания, скобки можно опустить.

В связи с выше сказанным нижеследующие формулы

$$(a\&в)\vee\overline{z} \text{ и } x\&y\rightarrow\overline{(y\vee(x\&z))}$$

могут быть представлены в более удобном виде:

$$(a\&в)\vee\overline{z} \text{ и } x\&y\rightarrow\overline{y\vee x\&z}\ .$$

Все возможные логические значения формулы алгебры логики, в зависимости от логических значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть определены с помощью таблицы истинности (см. табл. 2.2).

Приведем примеры решения задач с помощью таблицы истинности.

Пример 2.1. Для формулы $A\equiv\overline{a}\vee в\rightarrow a\&\overline{в}$ построить таблицу истинности и ее с помощью найти упрощенное значение заданной формулы.

Решение

1. Построим таблицу истинности для формулы $A\equiv\overline{a}\vee в\rightarrow a\&\overline{в}$ (табл. 2.3).

2. Для определения значения формулы A с помощью табл. 2.3 в последнем столбце найдем значение, равное единице (истина), в данном случае — это 2-я строка со значением переменных $a = 1$ и $b = 0$, соединив полученные значения с помощью конъюнкции получим искомый результат: $a\&\overline{b}$.

Ответ: $a\&\overline{b}$.

Таблица 2.3

a	$в$	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{a}\vee в$	$a\&\overline{в}$	$A\equiv\overline{a}\vee в\rightarrow a\&\overline{в}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

В дальнейшем можно решить данный пример с помощью равносильных преобразований первичной формулы, опираясь на законы математической логики (пример 2.7).

Пример 2.2. Для формулы $B \equiv x \to \overline{y \vee x \& z}$ построить таблицу истинности и найти значения ее переменных.

Решение

1. Построим таблицу истинности для формулы B (табл. 2.4).

2. Для определения значения заданной формулы B с помощью табл. 2.4 в последнем столбце найдем все значения, равные единице, т.е. истинные значения этой формулы. В данном примере — это 4 —8-я строки со значением переменных соответственно; $\chi = 1$, $y = 1$, $z = 0$ — 4-я строка; $\chi = 0$, $y = 1$, $z = 1$ — 5-я строка; $\chi = 0$, $y = 1$, $z = 0$ — 6-я строка; $\chi = 0$, $y = 0$, $z = 1$ — 7-я строка; $\chi = 0$, $y = 0$, $z = 0$ — 8-я строка. Соединив полученные значения переменных с помощью конъюнкции, получим:

$$x \& \overline{y} \& \overline{z} \vee \overline{x} \& y \& z \vee \overline{x} \& y \& \overline{z} \vee \overline{x} \& \overline{y} \& z \vee \overline{x} \& \overline{y} \& \overline{z}\, x.$$

Ответ:

$$x \& \overline{y} \& \overline{z} \vee \overline{x} \& y \& z \vee \overline{x} \& y \& \overline{z} \vee \overline{x} \& \overline{y} \& z \vee \overline{x} \& \overline{y} \& \overline{z}\,.$$

Данный пример более просто решить с помощью равносильных преобразований первичной формулы, опираясь на законы математической логики (пример 2.8).

Таблица 2.4

x	y	z	$x \& z$	$y \vee x \& z$	$\overline{y \vee x \& z}$	$B \equiv x \to \overline{y \vee x \& z}$
1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	1

Легко видеть, что, если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из единиц и нулей, при этом таблица истинности содержит 2^n строк.

2.3.1. Равносильные формулы алгебры логики

Определение 2.8. Две формулы алгебры логики A и B называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений, входящих в формулы элементарных высказываний.

Равносильность формул обозначают знаком «$\equiv$», а запись «$A \equiv B$» означает, что формулы A и B равносильны.

Равносильность формул можно представить следующим образом:

$\bar{\bar{x}} \equiv x, \quad x \vee x \equiv x, \quad (x \,\&\, \bar{x}) \vee y \equiv y.$

Определение 2.9. Любая формула называется ***тождественно-истинной*** или ***тавтологией***, если она принимает значение, равное единице при всех значениях входящих в нее переменных.

Пример 2.3. Доказать тождественную истинность двух формул:

$x \vee \bar{x}$ и $a \to (в \to a)$.

Решение

Доказательство тождественной истинности этих двух формул проведем с использованием таблицы истинности путем перебора всех переменных в формуле:

а) $x \vee \bar{x} \equiv 1$

при $x = 1,\ 1 \vee 1 \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$;

при $x = 0,\ 1 \vee 0 \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$;

б) $a \to (в \to a)$

при $a = 1,\ в = 1,\ 1 \to (1 \to 1) \equiv 1 \to 1 \equiv 1$;

при $a = 1,\ в = 0,\ 1 \to (0 \to 1) \equiv 1 \to 1 \equiv 1$;

при $a = 0,\ в = 0,\ 0 \to (0 \to 0) \equiv 0 \to 0 \equiv 1$.