

секреты преподавания математики

М.А. Екимова, Г.П. Кукин

ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ



УДК 514.11
ББК 22.151.0
Е45

Екимова М. А., Кукин Г. П.
Задачи на разрезание
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2017
119 с.
ISBN 978-5-4439-2334-5

Эта книга является первой книгой серии «Секреты преподавания математики», призванной изложить и обобщить накопленный опыт в области математического образования.

Данный сборник представляет собой одну из частей курса «Развивающая логика в 5–7 классах». Ко всем задачам, приведенным в книге, даны решения или указания.

Книга адресована учителям математики и руководителям кружков по математике.

Подготовлено на основе книги: *М. А. Екимова, Г. П. Кукин.* Задачи на разрезание. — 6-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0929-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2334-5

© Кукин Г. П., Екимова М. А., 2017.
© МЦНМО, 2017.

Оглавление

Введение 3

Раздел 1

§1. Задачи на клетчатой бумаге 8
§2. Пентамино 14
§3. Трудные задачи на разрезание 18
§4. Разбиение плоскости 20
§5. Танграм 24
§6. Задачи на разрезание в пространстве 26
§7. Задачи на раскраску 27
§8. Задачи с раскраской в условии 31

Раздел 2. Факультативные задачи

§9. Превращение фигур 42
§10. Разные задачи на разрезание 45
§11. Площади фигур 48

Ответы и решения

Раздел 1

§1. Задачи на клетчатой бумаге 53
§2. Пентамино 59
§3. Трудные задачи на разрезание 62
§4. Разбиение плоскости 66
§5. Танграм 70
§6. Задачи на разрезание в пространстве 72
§7. Задачи на раскраску 74
§8. Задачи с раскраской в условии 79

Раздел 2. Факультативные задачи

§9. Превращение фигур 101
§10. Разные задачи на разрезание 108
§11. Площади фигур 114

Раздел 1

§1. Задачи на клетчатой бумаге

Урок 1.1

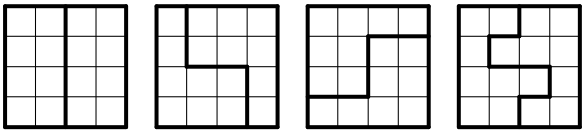
Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Развивать комбинаторные навыки (рассмотреть различные способы построения линии разреза фигур, правила, позволяющие при построении этой линии не терять решения), развивать представления о симметрии.

Задачи 1.1–1.4 решаем на уроке, задача 1.5 — на дом.

1.1. Квадрат содержит 16 клеток. Разделите квадрат на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. (Способы разрезания квадрата на две части будем считать различными, если части квадрата, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе.) Сколько всего решений имеет задача?

Указание. Найти несколько решений этой задачи не так уж сложно. На рис. 1 некоторые из них показаны, причем решения б) и в) одинаковы, так как полученные в них фигуры можно совместить наложением (если повернуть квадрат в) на 90 градусов).



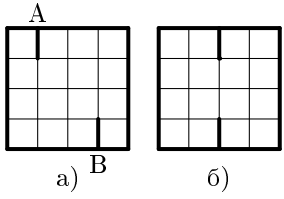
а) б) в) г)

Рис. 1

Но найти все решения и ни одно решение не потерять уже труднее. Заметим, что ломаная, делящая квадрат на две равные части, симметрична относительно центра квадрата. Это наблюдение позволяет шаг за шагом рисовать ломаную с двух концов. Например, если

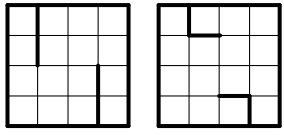
начало ломаной в точке A, то конец ее будет в точке B (рис. 2). Убедитесь, что для данной задачи начало и конец ломаной можно нарисовать двумя способами, показанными на рис. 2.

При построении ломаной, чтобы не потерять какое-либо решение, можно придерживаться такого правила. Если следующее звено ломаной можно нарисовать двумя способами, то сначала нужно заготовить второй такой же рисунок и выполнить этот шаг на одном рисунке первым, а на другом вторым способом (на рис. 3 показаны два продолжения рис. 2 (а)). Аналогично нужно поступать, когда способов не два, а три (на рис. 4 показаны три продолжения рис. 2 (б)). Указанный порядок действий помогает найти все решения.



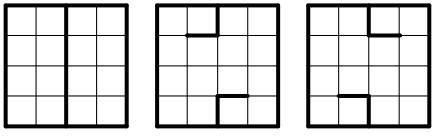
а) б)

Рис. 2



а) б)

Рис. 3



а) б) в)

Рис. 4

1.2. Прямоугольник 3×4 содержит 12 клеток. Найдите пять способов разрезания прямоугольника на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток (способы разрезания считаются различными, если части, полученные при одном способе разрезания, не равны частям, полученным при другом способе).

1.3. Прямоугольник 3×5 содержит 15 клеточек и центральная клетка удалена. Найдите пять способов разрезания оставшейся фигуры на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток.

1.4. Квадрат 6×6 разграфлен на 36 одинаковых квадратов. Найдите пять способов разрезания квадрата на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1.5. Задача 1.4 имеет более 200 решений. Найдите хотя бы 15 из них.

Урок 1.2

Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Продолжать развивать представления о симметрии, подготовка к теме «Пентамино» (рассмотрение различных фигурок, которые можно построить из пяти клеточек).

Задачи 1.6–1.11.

1.6. Можно ли квадрат 5×5 клеток разрезать на две равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток? Ответ обоснуйте.

1.7. Разделите квадрат 4×4 на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Сколько различных способов разрезания вы найдете?

1.8. Разделите фигуру (рис. 5) на три равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

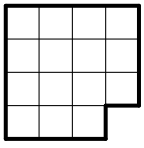


Рис. 5

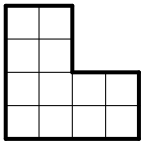


Рис. 6

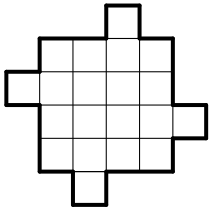


Рис. 7

1.9. Разделите фигуру (рис. 6) на четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов.

1.10. Разделите фигуру (рис. 7) на четыре равные части так, чтобы линии разрезов шли по сторонам квадратов. Найдите как можно больше решений.

1.11. Разделите квадрат 5×5 клеток с вырезанной центральной клеткой на четыре равные части.

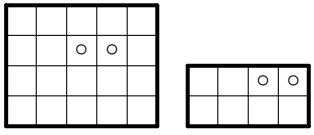
Урок 1.3

Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Продолжать развивать представления о симметрии (осевой, центральной).

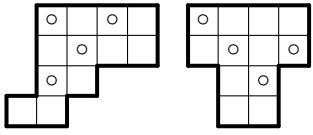
Задачи 1.12–1.16.

1.12. Разрежьте фигуры, изображенные на рис. 8, на две равные части по линиям сетки, причем в каждой из частей должен быть кружок.



а) б)

Рис. 8



а) б)

Рис. 9

1.13. Фигуры, изображенные на рис. 9, надо разрезать по линиям сетки на четыре равные части так, чтобы в каждой части был кружок. Как это сделать?

1.14. Разрежьте фигуру, изображенную на рис. 10, по линиям сетки на четыре равные части и сложите из них квадрат так, чтобы кружочки и звездочки расположились симметрично относительно всех осей симметрии квадрата.

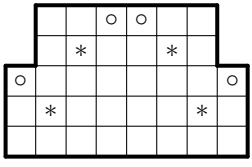


Рис. 10

1.15. Разрежьте данный квадрат (рис. 11) по сторонам клеток так, чтобы все части были одинакового размера и формы и чтобы каждая содержала по одному кружку и звездочке.

1.16. Разрежьте квадрат 6×6 из клетчатой бумаги, изображенный на рис. 12, на четыре одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала три закрашенные клетки.

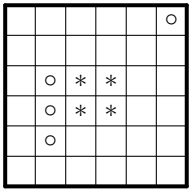


Рис. 11

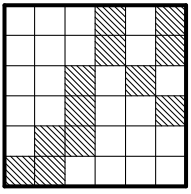


Рис. 12

Урок 1.4

Тема: Задачи на разрезание на клетчатой бумаге.

Цель: Научиться разрезать прямоугольник на две равные части, из которых можно сложить квадрат, другой прямоугольник. Научиться определять, из каких прямоугольников, разрезав их, можно составить квадрат.

Задачи 1.17–1.22. Дополнительно задачи 1.23, 1.24 (эти задачи можно рассмотреть в начале урока для разминки).

1.17. Прямоугольник 4×9 клеток разрежьте по сторонам клеток на две равные части так, чтобы из них затем можно было сложить квадрат.

1.18. Можно ли прямоугольник 4×8 клеток разрезать на две части по сторонам клеток так, чтобы из них можно было составить квадрат?

1.19. Из прямоугольника 10×7 клеток вырезали прямоугольник 1×6 клеток, как показано на рис. 13. Разрежьте полученную фигуру на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

1.20. Из прямоугольника 8×9 клеток вырезали закрашенные фигуры, как показано на рис. 14. Разрежьте полученную фигуру на две равные части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник 6×10.

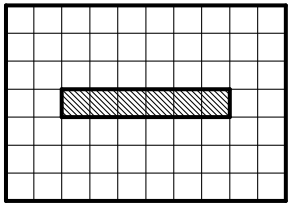


Рис. 13

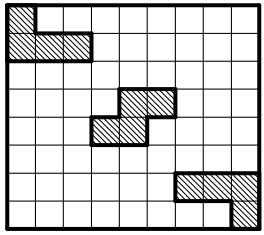


Рис. 14

1.21. На клетчатой бумаге нарисован квадрат размером 5×5 клеток. Покажите, как разрезать его по сторонам клеток на 7 различных прямоугольников.

1.22. Разрежьте квадрат 13×13 на 5 прямоугольников по сторонам клеток так, чтобы все десять чисел, выражающих длины сторон прямоугольников, были различными целыми числами.

1.23. Разделите фигуры, изображенные на рис. 15, на две равные части. (Разрезать можно не только по линиям клеток, но и по их диагоналям.)

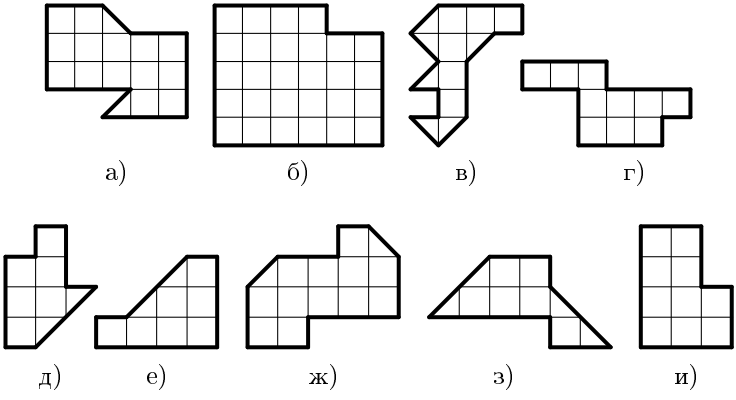
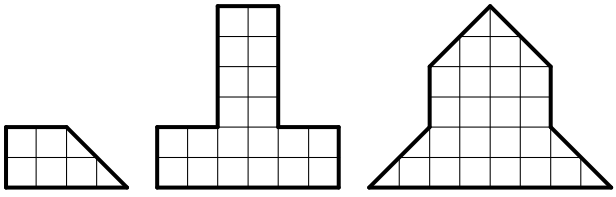


Рис. 15

1.24. Разрежьте фигуры, изображенные на рис. 16, на четыре равные части.



а) б) в)

Рис. 16

§2. Пентамино

Урок 2.1

Тема: Пентамино.
Цель: Развитие комбинаторных навыков учащихся.
Задачи 2.1–2.5.

Фигуры домино, тримино, тетрамино (игру с такими фигурками называют тетрис), пентамино составляют из двух, трех, четырех, пяти квадратов так, чтобы любой квадрат имел общую сторону хотя бы с одним квадратом.

Из двух одинаковых квадратов можно составить только одну фигуру — домино (см. рис. 17). Фигуры тримино можно получить из единственной фигуры домино, приставляя к ней различными способами еще один квадрат. Получится две фигуры тримино (рис. 18).

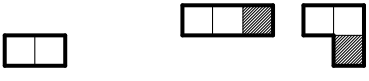


Рис. 17 Рис. 18

2.1. Составьте всевозможные фигуры тетрамино (от греч. слова «тетра» — четыре). Сколько их получилось? (Фигуры, полученные поворотом или симметричным отображением из каких-либо других, не считаются новыми).

2.2. Составьте все возможные фигуры пентамино (от греч. «пента» — пять). Сколько их получилось?

2.3. Составьте фигуры, изображенные на рис. 19, из фигурок пентамино. Сколько решений имеет задача для каждой фигуры?

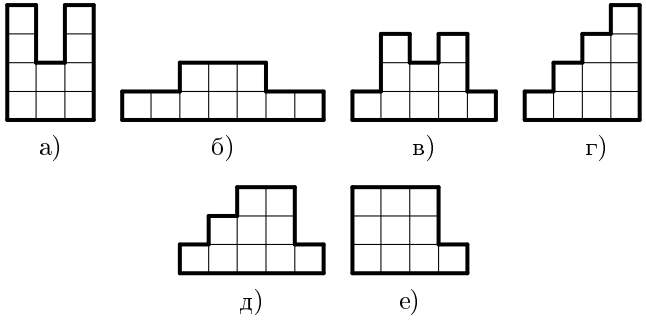


Рис. 19

2.4. Сложите прямоугольник 3×5 из фигурок пентамино. Сколько различных решений у вас получится?

2.5. Составьте фигуры, изображенные на рис. 20, из фигурок пентамино.

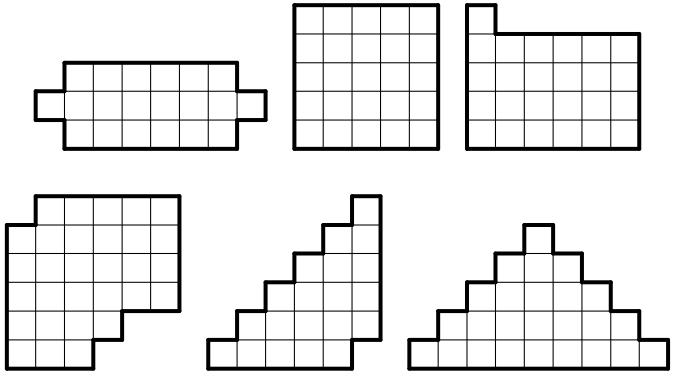


Рис. 20

Урок 2.2

Тема: Пентамино.
Цель: Развитие представлений о симметрии.
Задачи 2.6–2.12.

В задаче 2.2 мы составляли все возможные фигуры пентамино. Посмотрите их на рис. 21.

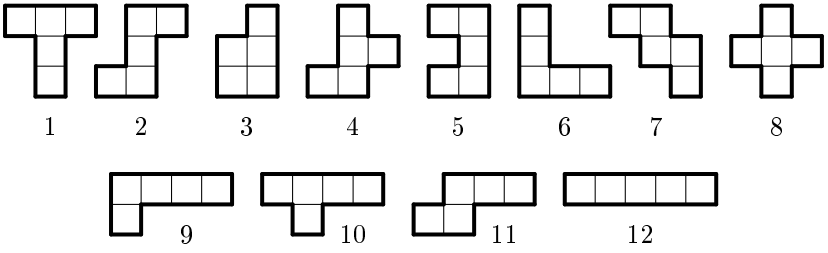


Рис. 21

Фигура 1 обладает следующим свойством. Если ее вырезать из бумаги и перегнуть по прямой a (рис. 22), то одна часть фигуры совпадет с другой. Говорят, что фигура симметрична относительно прямой a — оси симметрии. У фигуры 12 тоже есть ось симметрии, даже две — это прямые b и c, а у фигуры 2 осей симметрии нет.

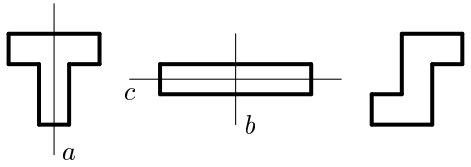


Рис. 22

2.6. Сколько осей симметрии имеет каждая фигура пентамино?

2.7. Из всех 12 фигур пентамино сложите прямоугольник 6×10. Несимметричные куски разрешается переворачивать.

2.8. Сложите из двенадцати фигур пентамино прямоугольник 6×10, причем так, чтобы каждый элемент касался какой-нибудь стороны этого прямоугольника.