А.Н.ШИРЯЕВ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О РАЗЛАДКЕ

$(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
Ш64

Ширяев А. Н.
Стохастические задачи о разладке.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
391 с.
ISBN 978-5-4439-3108-1

Монография преследует двоякую цель — с одной стороны, изложить основные положения теории оптимальных правил остановки, составляющий тот раздел теории вероятностей, который имеет дело со стохастическими оптимизационными проблемами, и, с другой стороны, изложить основные положения в решении задач скорейшего обнаружения момента спонтанного изменения вероятностных характеристик (момента «разладки»), которое опирается на методы оптимальных правил остановки.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (*проект* № 14–21–00162) *«Оптимальные статистические процедуры в классических и квантовых информационных системах».*

Подготовлено на основе книги: *Ширяев А. Н.* Стохастические задачи о разладке. — М.: МЦНМО, 2016. — 392 с. ISBN 978-5-4439-1108-3.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3108-1

© Ширяев А. Н., 2017
© МЦНМО, 2017

Оглавление

Предисловие 6

Введение 8

ГЛАВА I. Вероятностно-статистические модели в задачах скорейшего обнаружения. Дискретное и непрерывное время 16

§ 1. Стохастические θ-модели (параметрический подход) 16
§ 2. Стохастические G-модели (байесовский подход). Дискретное время 23
§ 3. Стохастические θ- и G-модели. Непрерывное время 24

ГЛАВА II. Основные постановки и решения задач скорейшего обнаружения. Дискретное время 28

§ 1. Варианты A, B, C и D. Формулировки 28
§ 2. Вариант A. Редукция к стандартной форме 30
§ 3. Статистики $\pi = (\pi_n)$, $\varphi = (\varphi_n)$, $\psi = (\psi_n)$ 33
§ 4. Вариант B, обобщения. Редукция к стандартной форме 38
§ 5. Вариант C. Редукционное неравенство 44
§ 6. Вариант D. CUSUM-статистика $\gamma = (\gamma_n)$ 45
§ 7. Решение задач о разладке в варианте A 56
§ 8. О подходах к решению задач о разладке в варианте B 61
§ 9. О подходах к решению задач о разладке в варианте C 63
§ 10. О подходах к решению задач о разладке в варианте D 64

ГЛАВА III. Оптимальные правила остановки. Общая теория для случая дискретного времени 67

§ 1. Мартингальный подход в случае конечного временно́го горизонта. Метод обратной индукции 67
§ 2. Мартингальный подход в случае бесконечного временно́го горизонта. Метод существенного супремума 74
§ 3. О предельном переходе в моделях с конечным горизонтом 81

ГЛАВА IV. Оптимальные правила остановки. Общая теория для случая дискретного времени в марковском представлении 84

§ 1. Определение марковских последовательностей 84
§ 2. Случай конечного временно́го горизонта $N < \infty$ 86

§ 3. Случай бесконечного временно́го горизонта $N = \infty$ 91
§ 4. Некоторые примеры 92

ГЛАВА V. Оптимальные правила остановки. Общая теория для случая непрерывного времени 100

§ 1. Стандартные и нестандартные проблемы оптимальных правил остановки 100
§ 2. Некоторые соображения по поводу задач об оптимальной остановке в случае непрерывного времени и их связь с математическим анализом 102
§ 3. Теория оптимальных правил остановки. Мартингальный подход . . 113
§ 4. Теория оптимальных правил остановки. Марковский подход 118
§ 5. Об оптимальных правилах остановки в случае неограниченных функций выигрыша 125
§ 6. Обобщения на неоднородные процессы 130
§ 7. Теория оптимальных правил остановки. Марковский подход. Терминальный функционал Мейера и интегральный функционал Лагранжа 132

ГЛАВА VI. Основные постановки и решения задач скорейшего обнаружения. Непрерывное время. Модели с броуновским движением 146

§ 1. Варианты A, B, C и D для случая броуновского движения 146
§ 2. Вариант A. Редукция к стандартной форме 149
§ 3. Вариант B. Редукция к стандартной форме 164
§ 4. Вариант C. Редукционные неравенства 171
§ 5. Вариант D. Редукционные неравенства. Оптимальность CUSUM-статистики γ 183
§ 6. О задаче скорейшего обнаружения с платой за осуществляемые наблюдения 196

ГЛАВА VII. Многоэтапная задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима. Модель с броуновским движением 220

§ 1. Применение метода Вальда 220
§ 2. Применение метода Неймана — Пирсона 230
§ 3. Оптимальный метод в многоэтапной задаче обнаружения разладки, появляющейся на фоне установившегося стационарного режима наблюдения (вариант E) 235

ГЛАВА VIII. Разладка на фильтрованных вероятностных пространствах 240

§ 1. Задачи о разладке с априорным G-распределением момента ее появления. Основные формулы 240

§ 2. Задачи о разладке с априорным распределением G момента ее появления. Байесовская постановка 247
§ 3. Задачи о разладке в варианте A* 256
§ 4. Одно замечание об эквивалентности задач в вариантах A и A* . . . 268
§ 5. Доверительные интервалы в задачах о разладке для G-моделей . . . 270
§ 6. О последовательном оценивании коэффициента сноса у фрактального броуновского движения 272

ГЛАВА IX. Байесовские и вариационные проблемы различения гипотез. Модели с броуновским движением 276

§ 1. Задача Вальда и сравнение с методом Неймана — Пирсона 276
§ 2. Последовательное различение трех гипотез 291
§ 3. Последовательное различение сложных гипотез (задача Чернова). Метод Житлухина — Муравлёва 310
§ 4. Последовательное различение двух гипотез (задача Кифера — Вейса) 321
§ 5. Последовательное различение двух гипотез (в задаче о двусторонней разладке) 333

ГЛАВА X. Некоторые применения в финансовой математике 361

§ 1. О выборе оптимального момента реализации акции, тренд которой подвержен разладке. I 361
§ 2. О выборе оптимального момента реализации акции, тренд которой подвержен разладке. II 369
§ 3. Русский опцион 373

Литература 382

Указатель обозначений 389

Предметный указатель 390

ГЛАВА I

Вероятностно-статистические модели в задачах скорейшего обнаружения. Дискретное и непрерывное время

§1. Стохастические θ-модели (параметрический подход)

1. Из приведенных во введении рассмотрений мы видим, что многие вероятностно-статистические схемы, например контроля качества продукции, таковы, что в поведении наблюдаемых случайных последовательностей происходит «сбой» в характере вероятностных распределений. В настоящем параграфе будет описана достаточно общая схема, называемая «стохастической θ-моделью», охватывающая и рассмотренные выше случаи, в которых под моментом θ понимается момент изменения вероятностных характеристик («разладка»).

2. Будем предполагать, что в основе всех наших рассмотрений лежит вероятностно-статистический *бинарный эксперимент*

$$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}; \mathrm{P}^0, \mathrm{P}^\infty),$$

где $(\Omega, \mathscr{F})$ — некоторое измеримое пространство, $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$ — поток (фильтрация) σ-алгебр, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{F}$. Также полагаем $\mathscr{F}_\infty = \bigvee \mathscr{F}_n$ $(= \sigma\big(\bigcup \mathscr{F}_n\big))$. Во многих приложениях $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty$.

Под мерой P^∞ будем понимать распределение вероятностей на $(\Omega, \mathscr{F})$, отвечающее гипотезе H^∞, что «сбой», «разладка» не появлялись вообще; это интерпретируется как то, что $\theta = \infty$.

Под мерой P^0 будем понимать распределение на $(\Omega, \mathscr{F})$, соответствующее гипотезе H^0, что «сбой», «разладка» присутствуют с самого начала ($\theta = 0$ или $\theta = 1$ в зависимости от «конкретных ситуаций»).

В тех «канонических» случаях, когда имеются результаты наблюдений над некоторыми случайными величинами $X_0, X_1, X_2, \ldots$, под $\mathscr{F}_n$ часто понимается σ-алгебра $\mathscr{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$, порожденная величинами $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

Мы хотели бы сейчас особо подчеркнуть, что все дальнейшие рассмотрения будут вестись без *координатного* (канонического) представления σ-алгебр $\mathscr{F}_n$ как σ-алгебр $\mathscr{F}_n^X$. Такой общий подход во многом упрощает все дальнейшие рассмотрения, делая их и достаточно общими, и в то же время удобными при рассмотрении конкретных моделей, особенно в случае непрерывного времени.

Итак, будем считать заданным бинарный вероятностно-статистический эксперимент $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}; \mathrm{P}^0, \mathrm{P}^\infty)$, ставя перед собой цель построения вероятностной модели $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}; \mathrm{P}^\theta, \theta \in \Theta)$, где, скажем, $\Theta = \{0, 1, \ldots, \infty\}$.

Конструируемые меры P^θ должны быть, конечно, такими, что

$$\mathrm{P}^\theta = \begin{cases} \mathrm{P}^0, & \text{если } \theta = 0, \\ \mathrm{P}^\infty, & \text{если } \theta = \infty. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Помимо этих естественных требований меры P^θ при $0 < \theta < \infty$ должны удовлетворять следующему свойству:

$$\mathrm{P}^\theta(A) = \mathrm{P}^\infty(A), \tag{1.1.2}$$

если $A \in \mathscr{F}_n$ и $n < \theta$. Это свойство отражает отсутствие влияния «будущего» на «прошлое» и в некоторых работах берется в качестве определения, которому должны удовлетворять меры P^θ, $\theta \in \Theta = \{0, 1, \ldots, \infty\}$, где «сбой», «разладка» происходят в момент θ.

Чтобы понять, как конструировать меры P^θ, обратимся сначала к *каноническому* случаю:

$$\Omega = \{x\colon x = (x_0, x_1, x_2, \ldots),\ x_i \in R\}, \quad \mathscr{F}_n = \sigma(x\colon x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

— σ-алгебры, порожденные ограничениями на первые $n+1$ координат $x_0, x_1, \ldots, x_n$ вектора x. (Иногда удобнее, как уже отмечалось, считать, что наблюдения начинаются не с 0, а с 1, т. е. полагать $x = (x_1, x_2, \ldots)$.)

Будем полагать $\mathrm{P}_n^0 = \mathrm{P}^0 \mid \mathscr{F}_n$, $\mathrm{P}_n^\infty = \mathrm{P}^\infty \mid \mathscr{F}_n$, $\mathrm{P}_n = \frac{1}{2}(\mathrm{P}_n^0 + \mathrm{P}_n^\infty)$. Тем самым меры P_n^0 и P_n^∞ абсолютно непрерывны относительно меры P_n. В каноническом случае плотности мер P_n^0 и P_n^∞ (относительно P_n) будем обозначать $f_n^0(x_0, \ldots, x_n)$ и $f_n^\infty(x_0, \ldots, x_n)$. Соответствующие условные плотности обозначаем $f_n^0(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1})$ и $f_n^\infty(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1})$, $n \geqslant 1$.

Из смысла момента θ как момента, когда меняется характер распределения (с P^∞ на P^0), естественно полагать, что условная плот-

ность $f_n^\theta(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1})$ должна задаваться очевидной формулой

$$f_n^\theta(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1}) = \\ = I(n < \theta) f_n^\infty(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1}) + I(n \geqslant \theta) f_n^0(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1}). \quad (1.1.3)$$

Отсюда и из соотношения (1.1.2) следует, что безусловные плотности $f_n^\theta(x_0, \dots, x_n)$ должны быть такими, что

$$f_n^\theta(x_0, \dots, x_n) = I(n < \theta) f_n^\infty(x_0, \dots, x_n) + \\ + I(n \geqslant \theta) f_{\theta-1}^\infty(x_0, \dots, x_{\theta-1}) \cdot f^0(x_0, \dots, x_n \mid x_0, \dots, x_{\theta-1}) = \\ = I(n < \theta) f_n^\infty(x_0, \dots, x_n) + I(n \geqslant \theta) f_{\theta-1}^\infty(x_0, \dots, x_{\theta-1}) \times \\ \times \frac{f_n^0(x_0, \dots, x_n)}{f_{\theta-1}^0(x_0, \dots, x_{\theta-1})}. \quad (1.1.4)$$

(Если $f_{\theta-1}^0 = 0$, то и $f_n^0 = 0$ при $n \geqslant \theta$; в этом случае $f_n^0 / f_{\theta-1}^0$ полагается равным нулю.)

Перейдем теперь к рассмотрению аналога этой формулы в общем («неканоническом») случае. С этой целью полезно отметить, что формуле (1.1.3) можно придать следующий вид:

$$f_n^\theta(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1}) - 1 = I(n < \theta)[f_n^\infty(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1}) - 1] + \\ + I(n \geqslant \theta)[f_n^0(x_n \mid x_0, \dots, x_{n-1}) - 1], \quad (1.1.5)$$

что будет существенно для понимания соответствующих выкладок в общем («неканоническом») случае.

3. Итак, вернемся к *общей* бинарной модели $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}; \mathrm{P}^0, \mathrm{P}^\infty)$. Наша цель будет состоять в построении меры P^θ с естественными свойствами (1.1.2).

Полагая $\mathrm{P} = \frac{1}{2}(\mathrm{P}^0 + \mathrm{P}^\infty)$ и $\mathrm{P}_n = \frac{1}{2}(\mathrm{P}_n^0 + \mathrm{P}_n^\infty)$, определим производные Радона — Никодима

$$L^0 = \frac{d\mathrm{P}^0}{d\mathrm{P}}, \quad L^\infty = \frac{d\mathrm{P}^\infty}{d\mathrm{P}}$$

и

$$L_n^0 = \frac{d\mathrm{P}_n^0}{d\mathrm{P}_n}, \quad L_n^\infty = \frac{d\mathrm{P}_n^\infty}{d\mathrm{P}_n}.$$

Лемма. *Имеют место следующие утверждения*: P-*п.н.*

$$L_n^0 = \mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n), \quad L_n^\infty = \mathrm{E}(L^\infty \mid \mathscr{F}_n), \quad n \geqslant 0, \quad (1.1.6)$$

где E — *усреднение по мере* P. *Последовательности* $(L_n^0)_{n\geqslant 0}$ *и* $(L_n^\infty)_{n\geqslant 0}$ *по мере* P *являются неотрицательными равномерно интегрируемыми мартингалами* (*Леви*) *с* $\mathrm{E}L_n^0 = 1$, $\mathrm{E}L_n^\infty = 1$.

Доказательство. Из определения $\mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n)$ следует, что для всякого множества $A \in \mathscr{F}_n$ выполняется равенство

$$\int_A \mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n)\, d\mathrm{P} = \int_A L^0\, d\mathrm{P} = \mathrm{P}^0(A) = \mathrm{P}_n^0(A) = \\ = \int_A \frac{d\mathrm{P}_n^0}{d\mathrm{P}_n}\, d\mathrm{P}_n = \int_A \frac{d\mathrm{P}_n^0}{d\mathrm{P}_n}\, d\mathrm{P} = \int_A L_n^0\, d\mathrm{P}. \quad (1.1.7)$$

Из $\mathscr{F}_n$-измеримости L_n^0 и условного математического ожидания $\mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n)$ в силу произвольности $A \in \mathscr{F}_n$ находим, что $L_n^0 = \mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n)$ (P-п.н.). Аналогично $L_n^\infty = \mathrm{E}(L^\infty \mid \mathscr{F}_n)$ (P-п.н.).

Поскольку по телескопическому свойству (P-п.н.)

$$\mathrm{E}(L_{n+1}^0 \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{E}L^0 \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n) = L_n^0,$$

последовательность $(L_n^0)_{n\geqslant 0}$ является мартингалом (Леви). То же верно и относительно $(L_n^\infty)_{n\geqslant 0}$.

Покажем, что мартингал $(L_n^0)_{n\geqslant 0}$ является равномерно интегрируемым:

$$\sup_n \mathrm{E}[L_n^0 I(L_n^0 > c)] \to 0, \quad c \to \infty. \quad (1.1.8)$$

Действительно, поскольку $L_n^0 = \mathrm{E}(L^0 \mid \mathscr{F}_n)$, имеем

$$\mathrm{E}[L_n^0 I(L_n^0 > c)] = \mathrm{E}[(L^0 \mid \mathscr{F}_n) I(L_n^0 > c)] = \\ = \mathrm{E}[\mathrm{E}(L^0 I(L_n^0 > c) \mid \mathscr{F}_n)] = \mathrm{E}[L^0 I(L_n^0 > c)]. \quad (1.1.9)$$

По неравенству Чебышёва

$$\mathrm{P}(L_n^0 > c) = \mathrm{E} I(L_n^0 > c) \leqslant \frac{\mathrm{E}L_n^0}{c} = \frac{\mathrm{E}L^0}{c} = \frac{1}{c} \to 0, \quad c \to \infty. \quad (1.1.10)$$

Далее, для всякого $M > 0$ имеем

$$\mathrm{E}[L^0 I(L_n^0 > c)] = \mathrm{E}[L^0 I(L^0 > M) I(L_n^0 > c)] + \\ + \mathrm{E}[L^0 I(L^0 \leqslant M) I(L_n^0 > c)]. \quad (1.1.11)$$

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем M так, чтобы выполнялось равенство $\mathrm{E}[L^0 I(L^0 > M)] \leqslant \varepsilon/2$. (Это можно сделать в силу теоремы о мажорируемой сходимости и того, что $\mathrm{E}L^0 = 1$.) Тем самым из соотношений (1.1.10) и (1.1.11) следует, что

$$\mathrm{E}[L^0 I(L_n^0 > c)] \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + M\mathrm{P}(L_n^0 > c) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{c} \leqslant \varepsilon,$$

если взять $c \geqslant 2M/\varepsilon$.

Таким образом, равномерно по n имеем

$$\mathrm{E}[L^0 I(L^0_n > c)] \leqslant \varepsilon,$$

что и доказывает требуемое свойство (1.1.8). Аналогичное утверждение справедливо и относительно мартингала $(L^\infty_n)_{n\geqslant 0}$. □

4. При переходе к общему («неканоническому») случаю полезно ввести следующие процессы:

$$M^0 = (M^0_n)_{n\geqslant 0} \quad \text{и} \quad M^\infty = (M^\infty_n)_{n\geqslant 0},$$

определяемые формулами

$$M^0_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta L^0_k}{L^0_{k-1}}, \quad M^\infty_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta L^\infty_k}{L^\infty_{k-1}}, \quad n \geqslant 1, \tag{1.1.12}$$

и $M^0_0 = 0$, $M^\infty_0 = 0$.

Процессы M^0 и M^∞ принято называть *стохастическими логарифмами* и обозначать

$$M^0 = \mathcal{L}\mathrm{og}\, L^0, \quad M^\infty = \mathcal{L}\mathrm{og}\, L^\infty. \tag{1.1.13}$$

Из соотношений (1.1.12) получаем

$$\Delta L^0_n = L^0_{n-1}\Delta M^0_n, \quad \Delta L^\infty_n = L^\infty_{n-1}\Delta M^\infty_n, \tag{1.1.14}$$

что обозначают как

$$L^0 = \mathcal{E}(M^0), \quad L^\infty = \mathcal{E}(M^\infty),$$

где $\mathcal{E}(M^0)$ и $\mathcal{E}(M^\infty)$ — стохастические экспоненты: при $n \geqslant 1$ имеем

$$\mathcal{E}(M^0)_n = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M^0_k), \quad \mathcal{E}(M^\infty) = \prod_{k=1}^n (1 + \Delta M^\infty_k)$$

и $\mathcal{E}(M^0)_0 = 1$, $\mathcal{E}(M^\infty)_0 = 1$.

Для дальнейшего полезно отметить, что в каноническом случае при $n \geqslant 1$ имеем

$$\Delta M^0_n = \frac{\Delta L^0_n}{L^0_{n-1}} = \frac{L^0_n}{L^0_{n-1}} - 1 = f^0_n(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - 1$$

и

$$\Delta M^\infty_n = f^\infty_n(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - 1.$$

Тем самым соотношение (1.1.5) подсказывает, что для произвольного θ надо полагать $M^\theta = (M^\theta_n)_{n\geqslant 0}$ определенным так, что

$$\Delta M^\theta_n = I(n < \theta)\Delta M^\infty_n + I(n \geqslant \theta)\Delta M^0_n, \tag{1.1.15}$$

и определять $L^\theta = (L^\theta_n)_{n\geqslant 0}$ формулой

$$L^\theta_n = \mathscr{E}(M^\theta)_n,$$

где

$$\mathscr{E}(M^\theta)_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\Delta M^0_k).$$

Из формулы (1.1.15) видим, что в случае $n<\theta$ выполняется равенство

$$\mathscr{E}(M^\theta)_n = \mathscr{E}(M^\infty)_n \tag{1.1.16}$$

и для $1\leqslant\theta\leqslant n$ имеем

$$\mathscr{E}(M^\theta)_n = \mathscr{E}(M^\infty)_{\theta-1}\cdot\frac{\mathscr{E}(M^0)_n}{\mathscr{E}(M^0)_{\theta-1}}. \tag{1.1.17}$$

Из соотношений (1.1.16) и (1.1.17) нетрудно вывести, что $\mathrm{E}\mathscr{E}(M^\theta)_n = 1$ для всех $n\geqslant 0$.

С введенным выше обозначением $L^\theta_n = \mathscr{E}(M^\theta)_n$ из соотношений (1.1.15), (1.1.16) и (1.1.17) получаем, что для всякого $\theta\geqslant 1$ выполняется равенство

$$L^\theta_n = I(n<\theta)L^\infty_n + I(n\geqslant\theta)L^\infty_{\theta-1}\frac{L^0_n}{L^0_{\theta-1}}. \tag{1.1.18}$$

Отсюда видим, что если $L^0_{\theta-1}>0$, то

$$L^\theta_n = I(n<\theta)L^\infty_n + I(n\geqslant\theta)L^0_n\frac{L^\infty_{\theta-1}}{L^0_{\theta-1}}. \tag{1.1.19}$$

Формулу (1.1.18) кратко можно записать в виде

$$L^\theta_n = L^\infty_{(\theta-1)\wedge n}\cdot\frac{L^0_n}{L^0_{(\theta-1)\wedge n}}. \tag{1.1.20}$$

Итак, согласно определению L^θ_n получаем, что

$$L^\theta_n = \begin{cases} L^\infty_{\theta-1}\cdot\dfrac{L^0_n}{L^0_{\theta-1}}, & \theta\leqslant n,\\ L^\infty_n, & \theta>n. \end{cases} \tag{1.1.21}$$

Перейдем теперь к определению мер P^θ на $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_n \mathscr{F}_n$. С этой целью для каждого $A\in\mathscr{F}_n$ определим меры $\mathrm{P}^\theta_n(A)$, полагая

$$\mathrm{P}^\theta_n(A) = \mathrm{E}[I(A)L^\theta_n]. \tag{1.1.22}$$

Для всякого $\theta\in\Theta=\{0,1,\dots,\infty\}$ меры P^θ_n, $n\geqslant\theta$, являются согласованными (т. е. $\mathrm{P}^\theta_n\,|\,\mathscr{F}_{n-1} = \mathrm{P}^\theta_{n-1}$). Возникает естественный вопрос о том,

когда на $(\Omega, \mathscr{F})$, где $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_n \mathscr{F}_n$, существует такая вероятностная мера P^θ, что ее сужение $\mathrm{P}^\theta \mid \mathscr{F}_n$ совпадает с P_n^0.

Без специальных предположений относительно пространств Ω и σ-алгебр $\mathscr{F}_n$, $n \geqslant 0$, такая мера может и не существовать (см. пример в § 3 гл. II учебника [54]). Но если интересоваться приложениями, когда имеется последовательность измеримых пространств $(\Omega_0, \mathscr{Y}_0)$, $(\Omega_0 \times \Omega_1, \mathscr{Y}_0 \otimes \mathscr{Y}_1), \ldots$, на каждом из которых определены меры P_i^θ, $i \geqslant 0$, и при этом каждое является полным сепарабельным метрическим пространством («Polish space»), то на $(\Omega, \mathscr{F}_\infty)$, где $\Omega = \Omega_0 \times \Omega_1 \times \ldots$, $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_n (\mathscr{Y}_0 \otimes \ldots \otimes \mathscr{Y}_n)$, существует мера P^θ с требуемыми свойствами $\mathrm{P}^\theta \mid \mathscr{F}_n = \mathrm{P}_n^\theta$, где $\mathscr{F}_n = \mathscr{Y}_0 \otimes \ldots \otimes \mathscr{Y}_n$. (В качестве полных сепарабельных метрических пространств можно взять, конечно, пространства $\Omega_0 = R$, $\Omega_0 \times \Omega_1 = R^2$ и т. д. См. в [54, гл. II, § 3] теорему Колмогорова о продолжении мер в $(R^\infty, \mathscr{B}(R^\infty))$.)

В предыдущих рассмотрениях мы предполагали, что в момент θ происходит *смена режима* (с P^∞ на P^0). Часто бывает удобнее считать, что θ — это *последний* момент, когда еще действует нормальный ход (P^∞), так что разладка в этом случае происходит в момент $\theta + 1$. В этом случае вместо равенства (1.1.3) будем иметь

$$f_n^\theta(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) = I(n \leqslant \theta) f_n^\infty(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) + \\ + I(n > \theta) f_n^0(x_n \mid x_0, \ldots, x_{n-1}). \quad (1.1.23)$$

Соответственно, вместо формулы (1.1.4) полагаем

$$f_n^\theta(x_1, \ldots, x_n) = I(n \leqslant \theta) f_n^\infty(x_0, \ldots, x_n) + \\ + I(n > \theta) f_\theta^\infty(x_0, \ldots, x_\infty) \cdot \frac{f_n^0(x_0, \ldots, x_n)}{f_\theta^0(x_0, \ldots, x_\theta)}. \quad (1.1.24)$$

Вместо формулы (1.1.15) имеем

$$\Delta M_n^\theta = I(n \leqslant \theta) \Delta M_n^\infty + I(n > \theta) \Delta M_n^0 \quad (1.1.25)$$

и вместо формулы (1.1.17) получаем

$$\mathscr{E}(M^\theta)_n = \mathscr{E}(M^\infty)_\theta \cdot \frac{\mathscr{E}(M^0)_n}{\mathscr{E}(M^0)_\theta}. \quad (1.1.26)$$

5. Пример (независимых наблюдений). Пусть $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 1}) = (R^\infty, \mathscr{B}_\infty, (\mathscr{B}_n)_{n \geqslant 1})$ с мерами P^0 и P^∞, сужения которых (по лебеговой мере в R^n) имеют плотности

$$f_n^0(x_1, \ldots, x_n) = f^0(x_1) \ldots f^0(x_\infty)$$

и

$$f_n^{\infty}(x_1,\dots,x_n) = f^{\infty}(x_1)\dots f^{\infty}(x_n).$$

В этом случае структура плотностей $f_n^{\theta}(x_1,\dots,x_n)$ проста:

$$f_n^{\theta}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} f^{\infty}(x_1)\dots f^{\infty}(x_n), & 1 \leqslant n < \theta, \\ f^{\infty}(x_1)\dots f^{\infty}(x_{n-1}) f^{0}(x_{\theta})\dots f^{\theta}(x_n), & n \geqslant \theta. \end{cases}$$

§ 2. Стохастические G-модели (байесовский подход). Дискретное время

1. В предыдущем параграфе параметр θ был просто некоторым *числовым параметром* со значениями в $\Theta = \{0, 1, \dots, \infty\}$. В определяемых далее G-моделях будет предполагаться, что θ является целочисленной неотрицательной *случайной величиной* с функцией распределения $G = G(x)$, $x = 0, 1, \dots$

Пусть $\Omega' = N$ $(= \{0, 1, \dots\})$, $\mathscr{F}' = \mathscr{B}(N)$ и P' — вероятностная мера на $(\Omega', \mathscr{F}')$, определяемая своей функцией распределения $G = G(n)$ $(= \mathrm{P}'(\theta \leqslant n))$, $n \in N$.

Положим $\overline{\Omega} = \Omega \times \Omega'$, $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_{\infty} \otimes \mathscr{F}'$, где $(\Omega, \mathscr{F}_{\infty})$ были введены в § 1. Для $A \in \mathscr{F}_{\infty}$ и $B \in \mathscr{F}'$ положим

$$\overline{\mathrm{P}}^{G}(A \times B) = \sum_{\theta \in B} \mathrm{P}^{\theta}(A) \Delta G(\theta), \tag{1.2.1}$$

где $\Delta G(\theta) = G(\theta) - G(\theta - 1)$, $\theta \geqslant 1$ и $\Delta G(0) = G(0)$. Величины $\mathrm{P}^{\theta}(A)$ определены выше в § 1.

Полученный вероятностно-статистический эксперимент $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, (\overline{\mathscr{F}}_n)_{n \geqslant 0}, \overline{\mathrm{P}}^{G})$ будем называть «G-моделью», соответствующей G-распределению для случайной величины θ. Продолжение меры $\mathrm{P}^{\theta}(\,\cdot\,)$ на $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_{\infty} \otimes \mathscr{F}'$ будем обозначать тем же символом $\overline{\mathrm{P}}^{G}$, а в целях экономии записей $\overline{\mathrm{P}}^{G}$ обозначим как P^{G}.

В том случае, когда $A \in \mathscr{F}_n$, будем полагать $\mathrm{P}^{G}(A) = \overline{\mathrm{P}}^{G}(A \times N)$. Ясно, что в этом случае

$$\mathrm{P}^{G}(A) = \sum_{\theta=0}^{n} \mathrm{P}_n^{\theta}(A) \Delta G(\theta) + (1 - G(n)) \mathrm{P}_n^{\infty}(A), \tag{1.2.2}$$

где учтено, что $\mathrm{P}_n^{\theta}(A) = \mathrm{P}_n^{\infty}(A)$ для $A \in \mathscr{F}_n$, если $\theta > n$.

Если полагать $L^{G} = (L_n^{G})_{n \geqslant 0}$, где $L_n^{G} = d\mathrm{P}_n^{G} / d\mathrm{P}_n$, $\mathrm{P}_n^{G} = \mathrm{P}^{G} \mid \mathscr{F}_n$, то

$$L_n^{G} = \sum_{\theta=0}^{\infty} L_n^{\theta} \Delta G(\theta). \tag{1.2.3}$$

Учитывая, что имеют место формулы (1.1.21), из соотношения (1.2.3) находим, что

$$L_n^G = \sum_{\theta=0}^{n} L_{\theta-1}^{\infty} \frac{L_n^0}{L_{\theta-1}^0} \Delta G(\theta) + L_n^{\infty}(1-G(n)),$$

где $L_{-1}^{\infty} = L_{-1}^0 = 1$ и $L_0^{\infty} = L_0^0 = 1$.

Пример. Пусть θ имеет *геометрическое* распределение: $G(0) = \pi$, $\Delta G(n) = (1-\pi)q^{n-1}p$ для $n \geqslant 1$. Тогда $\mathrm{P}'(\theta = 0) = \pi$, $\mathrm{P}'(\theta = k \mid \theta > 0) = q^{k-1}p$, где мы полагаем $0 \leqslant \pi < 1$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$. Поэтому если $L_k^0 > 0$, $1 < k \leqslant n-1$, то

$$L_n^G = \pi L_n^0 + (1-\pi)L_n^0 \sum_{k=1}^{n-1} pq^k \frac{L_k^{\infty}}{L_k^0} + (1-\pi)q^n L_n^{\infty}.$$

Отсюда находим, что если $f_n^0(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_n^{\infty}(x_1, \ldots, x_n)$ — плотности мер P_n^0 и P_n^{∞} по *лебеговой* мере, то соответствующая плотность будет иметь вид

$$f_n^G(x_1, \ldots, x_n) = \pi f_n^0(x_1, \ldots, x_n) + (1-\pi) f_n^0(x_1, \ldots, x_n) \times$$
$$\times \sum_{k=0}^{n-1} pq^k \frac{f_k^{\infty}(x_1, \ldots, x_k)}{f_k^0(x_1, \ldots, x_k)} + (1-\pi)q^n f_n^{\infty}(x_1, \ldots, x_n) = \pi f_n^0(x_1, \ldots, x_n) +$$
$$+ (1-\pi) \sum_{k=0}^{n-1} pq^k f_k^{\infty}(x_1, \ldots, x_k) \cdot f_{n,k}^0(x_{k+1}, \ldots, x_n \mid x_1, \ldots, x_k) +$$
$$+ (1-\pi)q^n f_n^{\infty}(x_1, \ldots, x_n),$$

где $f_{n,k}^0(x_{k+1}, \ldots, x_n \mid x_1, \ldots, x_k)$ есть условная плотность, определяемая как $\dfrac{f_n^0(x_1, \ldots, x_n)}{f_k^0(x_1, \ldots, x_k)}$ (в предположении, что $f_k^0(x_1, \ldots, x_k) > 0$).

Замечание. Наличие «прямого произведения» в определении «G-модели» говорит о том, что наблюдаемые данные (определяемые поведением «разладочного» процесса) являются независимыми.

§ 3. Стохастические θ- и G-модели. Непрерывное время

1. Как и в случае дискретного времени, будем предполагать, что мы имеем дело с бинарным вероятностно-статистическим экспериментом $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}; \mathrm{P}^0, \mathrm{P}^{\infty})$, где $(\Omega, \mathscr{F})$ — некоторое измеримое пространство с фильтрацией $(\mathscr{F}_t)$, $t \geqslant 0$, и двумя мерами P^0 и P^{∞}.

По аналогии со случаем дискретного времени будем обозначать

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2}(\mathrm{P}^0 + \mathrm{P}^\infty).$$

Через P^0_t, P^∞_t и P_t обозначаем сужения мер $\mathrm{P}^0 \mid \mathscr{F}_t$, $\mathrm{P}^\infty \mid \mathscr{F}_t$ и $\mathrm{P} \mid \mathscr{F}_t$.

Замечание. Всюду в книге в случае непрерывного времени будем предполагать, что фильтрации $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *непрерывны справа* $\left(\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s \equiv \right.$ $\left. \equiv \mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t,\ t \geqslant 0\right)$ и *пополнены* по мере $\mathrm{P} = \frac{1}{2}(\mathrm{P}^0 + \mathrm{P}^\infty)$; иначе говоря, фильтрации удовлетворяют *обычным* условиям. Известно (см., например, [28, гл. VI]), что если $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ есть субмартингал, для которого $(\mathrm{E}X_t)_{t\geqslant 0}$ непрерывно справа, то у такого процесса существует модификация, выборочные функции которой при каждом t непрерывны справа и имеют пределы слева. Для упрощения записи мы будем считать, что сам процесс X уже обладает такими траекториями. Типичным примером такого процесса могут быть, например, встречающиеся далее процессы $(L^0_t), (L^\infty_t), (L^\theta_t), \ldots$

Положим

$$L^0_t = \frac{d\mathrm{P}^0_t}{d\mathrm{P}_t} \quad \text{и} \quad L^\infty_t = \frac{d\mathrm{P}^\infty_t}{d\mathrm{P}_t}.$$

Как и в случае дискретного времени, производные Радона — Никодима $d\mathrm{P}^0_t/d\mathrm{P}_t$ и $d\mathrm{P}^\infty_t/d\mathrm{P}_t$ таковы, что процессы $L^0 = (L^0_t)_{t\geqslant 0}$ и $L^\infty = (L^\infty_t)_{t\geqslant 0}$ являются положительными, при этом $\mathrm{E}L^0_t = 1$, $\mathrm{E}L^\infty_t = 1$, $t \geqslant 0$. Через $(M^i_t)_{t\geqslant 0}$ обозначаем *стохастические логарифмы* процессов L^i, $i = 0, \infty$:

$$M^i_t = \int_0^t \frac{dL^i_s}{L^i_{s-}} \quad (= (\mathscr{L}\mathrm{og}\, L^i)_t).$$

Эти процессы являются локальными мартингалами [26]. Процессы $L^i = (L^i_t)_{t\geqslant 0}$ таковы, что $L^i = \mathscr{E}(M^i)$, где $\mathscr{E}(M^i)$ — стохастические экспоненты, являющиеся единственным (сильным) решением [27] уравнения

$$d\mathscr{E}(M^i)_t = \mathscr{E}(M^i)_{t-}\, dM^i_t, \quad \mathscr{E}(M^i)_0 = 1.$$

Рассмотрения в случае дискретного времени показывают, что для определения стохастических θ-моделей целесообразно ввести локальные мартингалы $M^\theta = (M^\theta_t)_{t\geqslant 0}$, определяемые по M^0 и M^∞ формулами

$$M^\theta_t = \int_0^t I(s < \theta)\, dM^\infty_s + \int_0^t I(s \geqslant \theta)\, dM^\theta_s, \quad t \geqslant 0.$$

Положим теперь $L^\theta = \mathscr{E}(M^\theta)$.

Понятно, что при $\theta = 0$ или $\theta = \infty$ процессы M^θ и L^θ совпадают с M^0, L^0 и M^∞, L^∞. Кроме того, для $0 < \theta < \infty$ справедлива формула

$$L_t^\theta = L_t^\infty I(t < \theta) + L_t^0 \frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} I(t \geqslant \theta) \tag{1.3.1}$$

(ср. с (1.1.21)), что следует из того, что левая и правая части равенства (1.3.1) удовлетворяют одному и тому же уравнению по процессу M^θ. (Величины $L_{\theta-}^\infty$, $L_{\theta-}^0$ существуют в силу сделанного выше замечания.)

Как и в случае дискретного времени, определяем семейство мер P^θ для $\theta \geqslant 0$, для каждого $A \in \mathscr{F}$ $(= \bigvee_{t \geqslant 0} \mathscr{F}_t)$ полагая

$$\mathrm{P}^\theta(A) = \mathrm{E}^\theta[I(A) L_\infty^\theta],$$

где

$$L_\infty^\theta = \lim_{s \to \infty} L_s^\theta \quad \left(= L_\infty^0 \frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \right).$$

Ясно, что $L_\infty^\theta \geqslant 0$. Покажем, что $\mathrm{E}^\theta L_\infty^\theta = 1$ и, следовательно, P^θ действительно является вероятностной мерой. Из равенства (1.3.1) следует, что

$$\mathrm{E} L_\infty^\theta = \mathrm{E}\left[L_\infty^0 \frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \right] = \mathrm{E}\left[\frac{L_{\theta-}^\infty}{L_{\theta-}^0} \mathrm{E}(L_\infty^0 \mid \mathscr{F}_{\theta-}) \right] = \mathrm{E} L_{\theta-}^\infty = 1.$$

Каждая из мер P^θ интерпретируется как мера, соответствующая поведению системы, когда разладка появляется в момент θ.

Полезно отметить, что из соотношения (1.3.1) следует равенство

$$\mathrm{P}_t^\theta = \mathrm{P}_t^\infty \quad \text{при } \theta > t,$$

где $\mathrm{P}_t^\theta = \mathrm{P}^\theta \mid \mathscr{F}_t$ (ср. с (1.1.21)).

Имея в виду *байесовские* задачи, будем предполагать, что θ является случайной величиной с *функцией распределения* G на $(R_+, \mathscr{B}(R_+))$.

В этой связи введем фильтрованное вероятностное пространство $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, (\overline{\mathscr{F}}_t)_{t \geqslant 0}, \overline{\mathrm{P}}^G)$, где

$$\overline{\Omega} = \Omega \times R_+, \quad \overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(R_+), \quad \overline{\mathscr{F}}_t = \mathscr{F}_t \otimes \{\varnothing, R_+\}$$

и вероятностная мера $\overline{\mathrm{P}}^G$ такова, что для любых $A \in \mathscr{F}$, $B \in \mathscr{B}(R_+)$ выполняется равенство

$$\overline{\mathrm{P}}^G(A \times B) = \int_B \mathrm{P}^\theta(A)\, dG(\theta).$$

Пространство $(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}}, (\overline{\mathscr{F}}_t)_{t \geqslant 0}, \overline{\mathrm{P}}^G)$ будем, как и в дискретном случае, называть *G-моделью*, построенной по бинарному вероятностно-

статистическому эксперименту $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}; \mathrm{P}^0, \mathrm{P}^\infty)$ и функции распределения G. Символом $\bar{\mathrm{E}}^G$ обозначаем математическое ожидание по мере $\bar{\mathrm{P}}^G$.

Случайная величина θ, определенная на $(\bar{\Omega}, \bar{\mathscr{F}})$ как $\theta(\omega, t) = t$, $t \geqslant 0$, интерпретируется как случайный момент разладки. Ясно, что $\bar{\mathrm{P}}^G(\theta \leqslant t) = G(t)$. При этом момент θ не является измеримым относительно σ-алгебры $\bigvee_t \bar{\mathscr{F}}_t$, т. е. момент разладки непосредственно не наблюдаем. Для упрощения записей вместо $\bar{\mathrm{P}}^G$ будем писать P^G.

ГЛАВА II

Основные постановки и решения задач скорейшего обнаружения. Дискретное время

§1. Варианты A, B, C и D. Формулировки

1. С самого начала будем предполагать, что с исходным вероятностно-статистическим экспериментом $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}; \mathrm{P}^0, \mathrm{P}^\infty)$, где

$$\{\varnothing, \Omega\} = \mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}_1 \subseteq \dots,$$

связаны «θ-модели» и «G-модели» (гл. I, § 1, 2).

Пусть $0 < \alpha \leqslant 1$ и

$$\mathfrak{M}_\alpha = \{0 \leqslant \tau < \infty : \mathrm{P}^G(\tau < \theta) \leqslant \alpha\} \tag{2.1.1}$$

— класс тех *конечных* моментов остановки τ (относительно $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$), для которых вероятность ложной тревоги $\mathrm{P}^G(\tau < \theta)$ меньше или равна α. (Напомним, что P^G — это $\overline{\mathrm{P}}^G$; см. гл. I, § 2 и 3.)

Вариант A (*условно-экстремальная и байесовская постановки*). Требуется найти момент $\tau_\alpha^{\mathbf{A}} \in \mathfrak{M}_\alpha$, если таковой существует, для которого

$$\inf_{\tau\in\mathfrak{M}_\alpha} \mathrm{E}^G(\tau-\theta)^+ = \mathrm{E}^G(\tau_\alpha^{\mathbf{A}}-\theta)^+. \tag{2.1.2}$$

(Здесь G — распределение вероятностей для θ.)

Для решения этой *условно-экстремальной* задачи естественно, следуя методу множителей Лагранжа, обратиться к *байесовской задаче*: найти такой момент τ_c^*, что

$$\mathbb{A}(c) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}} [\mathrm{P}^G(\tau<\theta) + c\mathrm{E}^G(\tau-\theta)^+] = \mathrm{P}^G(\tau_c^*<\theta) + c\mathrm{E}^G(\tau_c^*-\theta)^+. \tag{2.1.3}$$

Здесь $\mathfrak{M}$ — класс конечных (P^G-п.н.) моментов остановки относительно потока $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, а константа c положительна.

Интерес к задаче (2.1.3) вполне понятен: $\mathrm{P}^G(\tau<\theta)$ — это вероятность *ложной тревоги*, т. е. вероятность события $\{\tau<\theta\}$; $\mathrm{E}^G(\tau-\theta)^+$ — это *среднее время запаздывания* в предположении, что $\tau > \theta$.

Задача (2.1.3) является одной из *основных* в классе задач обнаружения «разладки» (момента θ). Другие минимизируемые функционалы будут рассмотрены далее (п. 2).

2. Вариант B (*обобщенная байесовская постановка*). Пусть $\mathfrak{M}_T = \{\tau < \infty : \mathrm{E}^\infty \tau \geqslant T\}$, где T — некоторый фиксированный момент, $0 < T < \infty$. Требуется найти оптимальный момент $\tau_T^{\mathbf{B}}$, если таковой существует, на котором достигается значение

$$\mathbb{B}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{T} \sum_{\theta \geqslant 0} \mathrm{E}^\theta (\tau - \theta)^+. \tag{2.1.4}$$

Часто вместо $\mathbb{B}(T)$ рассматривают эквивалентный критерий

$$\mathbb{B}_1(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sum_{\theta \geqslant 0} \mathrm{E}^\theta (\tau - \theta)^+.$$

(Ясно, что $\mathbb{B}(T) = \frac{1}{T}\mathbb{B}_1(T)$.) Также используется критерий

$$\mathbb{B}_2(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \frac{1}{\mathrm{E}^\infty \tau} \sum_{\theta \geqslant 0} \mathrm{E}^\theta (\tau - \theta)^+.$$

Поскольку для $\tau \in \mathfrak{M}_T$ справедливо неравенство $\mathrm{E}^\infty \tau \geqslant T$, получаем, что

$$\mathbb{B}_2(T) \leqslant \mathbb{B}(T) = \frac{1}{T}\mathbb{B}_1(T).$$

Отметим, что $\mathrm{E}^\infty \tau$ — это среднее время до поднятия «тревоги» в предположении, что разладка отсутствует вовсе, т. е. действует мера P^∞. Понятно, что если в критерии $\mathbb{B}_2(T)$ оптимальный момент τ_2^* таков, что $\mathrm{E}^\infty \tau_2^* = T$, то $\mathbb{B}_2(T) = \mathbb{B}(T) = \frac{1}{T}\mathbb{B}_1(T)$.

Вариант C (*первая минимаксная задача*). Требуется найти оптимальный момент $\tau_T^{\mathbf{C}}$, если таковой существует, на котором достигается значение

$$\mathbb{C}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \geqslant 0} \mathrm{E}^\theta (\tau - \theta \mid \tau \geqslant \theta), \tag{2.1.5}$$

Вариант D (*вторая минимаксная задача*). Требуется найти оптимальный момент $\tau_T^{\mathbf{D}}$, если таковой существует, на котором достигается значение

$$\mathbb{D}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_{\theta \geqslant 1} \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \mathrm{E}^\theta ((\tau - \theta + 1)^+ \mid \mathscr{F}_{\theta-1})(\omega), \tag{2.1.6}$$

где $\operatorname{ess\,sup}_\omega$ (или $\operatorname{vrai\,sup}_\omega$) — существенный супремум[1].

[1] Для всякой случайной величины $X(\omega)$, заданной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$, по определению $\operatorname{ess\,sup}_\omega X(\omega) = \inf\{C : \mathrm{P}(X(\omega) \leqslant C) = 1\}$.

Сформулированные постановки задач скорейшего обнаружения момента появления разладки по наблюдениям, содержащимся в потоке «информации» $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 0}$, мы называем *основными*, и им в дальнейшем будет уделяться существенное внимание. Постановка **A** впервые была дана в работах автора [40, 44]. Постановка **B** была рассмотрена в работах [44, 74]. Первая постановка минимаксной задачи обнаружения **C** дана М. Поллаком (M. Pollak) [100]; вторая минимаксная задача **D** была введена Г. Лорденом (G. Lorden) [87].

§ 2. Вариант A. Редукция к стандартной форме

1. Обратимся к функционалам в варианте **A**, внеся в постановку задачи некоторые видоизменения. Предположим сейчас, что интересующие нас функционалы имеют вид

$$\mathbb{A}_1(c) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}} [\mathrm{P}^G(\tau < \theta) + c\mathrm{E}^G(\tau-\theta)^+] \tag{2.2.1}$$

и

$$\mathbb{A}_2(c) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}} [\mathrm{P}^G(\tau < \theta) + c\mathrm{E}^G(\tau-\theta+1)^+], \tag{2.2.2}$$

где $\mathfrak{M} = \{\tau : \tau \in \{0, 1, \ldots\}\}$ — класс конечных моментов остановки.

Первым шагом в решении этих задач является их сведение к задачам в стандартной форме. Выражается это в справедливости следующего результата.

Теорема 1. *Пусть*

$$\pi_n = \mathrm{P}^G(\theta \leqslant n \mid \mathscr{F}_n) \tag{2.2.3}$$

— апостериорная вероятность того, что $\theta \leqslant n$ при фиксированной «информации» $\mathscr{F}_n$, $n \geqslant 0$ $(\pi_0 = \mathrm{P}^G(\theta = 0))$. Тогда

$$\mathbb{A}_1(c) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathrm{E}^G\left[(1-\pi_\tau) + c\sum_{k=0}^{\tau-1}\pi_k\right] \tag{2.2.4}$$

и

$$\mathbb{A}_2(c) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathrm{E}^G\left[(1-\pi_\tau) + c\sum_{k=0}^{\tau}\pi_k\right]. \tag{2.2.5}$$

Доказательство. Из очевидного свойства для (дискретных) случайных величин

$$\xi^+ = \sum_{k\geqslant 1} I(\xi \geqslant k)$$