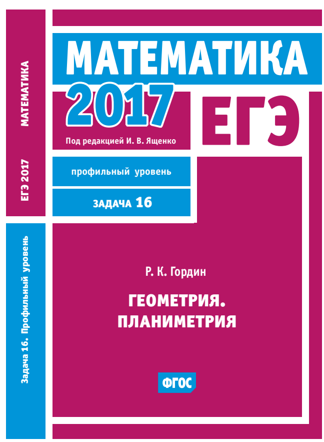
МАТЕМАТИКА 2017 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

Р. К. Гордин

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 16

ФГОС



УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г68

Гордин Р. К.
Г68 ЕГЭ 2017. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень). — М.: МЦНМО, 2017. — 448 с.

ISBN 978-5-4439-1090-1

Пособие содержит решения задач книги Р. К. Гордина «ЕГЭ 2017. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень)». Оно ориентировано на повторение курса геометрии и позволяет подготовиться к решению геометрической задачи 16 профильного уровня ЕГЭ по математике.

Книга будет полезна учащимся старших классов при подготовке к единому государственному экзамену, учащимся средней школы при изучении курса геометрии, а также всем любителям геометрии.

Пособие предназначено для учащихся старшей и средней школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

Учебно-методическое пособие

Гордин Рафаил Калманович

ЕГЭ 2017. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень)

Рисунки М. Ю. Панова, В. Ю. Радионова и Э. С. Власенко

Подписано в печать 29.08.2016 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 28. Тираж 3000 экз. Заказ № .

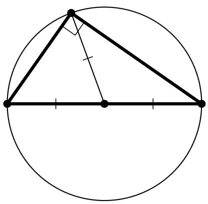
Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1090-1

§ 1. Медиана прямоугольного треугольника

Подготовительные задачи



1.1. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.

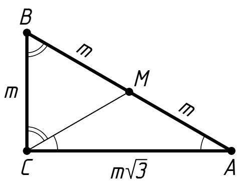
Ответ: 2.

Решение. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы. Следовательно, радиус окружности равен половине гипотенузы, т. е. 2.

1.2. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $2m$, m, $m\sqrt{3}$.

Решение. Пусть CM — медиана прямоугольного треугольника ABC, в котором $\angle C = 90°$. Тогда $CM = AM = BM = m$, $AB = 2m$.



Пусть $\angle BCM > \angle ACM$, тогда

$$\angle BCM = \frac{2}{3}\angle ACB = 60°, \quad \angle ACM = 30°,$$

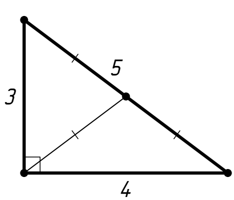
поэтому $\angle B = 60°$ и треугольник BCM — равносторонний. Следовательно,

$$BC = CM = m, \quad AC = BC \operatorname{tg} 60° = m\sqrt{3}.$$

1.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите стороны треугольника.

Ответ: 3; 4; 5.

Решение. Обозначим через a и b $(a < b)$ катеты треугольника. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, а две стороны треугольника с периметром 8 соответственно равны двум сторонам треугольника с периметром 9, разность периметров равна разности третьих сторон. Значит, $b - a = 9 - 8 = 1$. Гипотенуза данного прямоугольного треугольника равна удвоенной медиане, т. е. сумме двух сторон треугольника с периметром 8, поэтому гипотенуза равна $8 - a$.



По теореме Пифагора

$$a^2+b^2=(8-a)^2.$$

Из системы

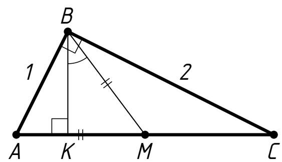
$$\begin{cases} b-a=1, \\ a^2+b^2=(8-a)^2 \end{cases}$$

находим, что $a=3$, $b=4$.

1.4. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана MB, причём $AM=BM$. Найдите косинус угла KBM, если $AB=1$, $BC=2$.

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Решение. Поскольку $BM=AM=MC$, то треугольник ABC — прямоугольный. Поэтому



$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{5},\quad AC\cdot BK=AB\cdot BC,$$

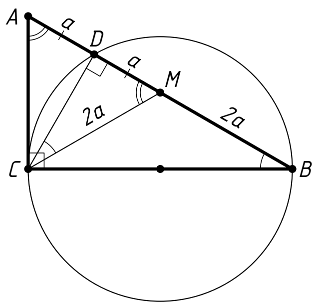
$$BK=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad BM=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\cos\angle KBM=\frac{BK}{BM}=\frac{4}{5}.$$

1.5. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении $1:3$. Найдите острые углы треугольника.

Ответ: 30°, 60°.

Решение. Пусть окружность, построенная как на диаметре на катете BC прямоугольного треугольника ABC, пересекает гипотенузу AB в точке D, отличной от B, причём $AD=a$, $BD=3a$. Проведём медиану CM. Тогда $AM=CM=2a$, а т. к. точка D лежит на окружности с диаметром BC, то $\angle CDB=90^\circ$.



В прямоугольном треугольнике CDM гипотенуза CM, равная $2a$, вдвое больше катета DM:

$$DM=AM-AD=2a-a=a.$$

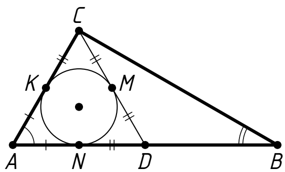
Поэтому $\angle DCM=30^\circ$, а $\angle AMC=60^\circ$. Угол при вершине M равнобедренного треугольника AMC равен 60°. Следовательно, треугольник AMC равносторонний. Поэтому

$$\angle BAC=60^\circ,\quad \angle ABC=90^\circ-\angle BAC=30^\circ.$$

1.6. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

Ответ: $30°$, $60°$.

Решение. Пусть указанная окружность касается отрезка CD в его середине M, а отрезков AD и AC — в точках N и K соответственно. Поскольку медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, то $AD = CD$. По свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки,



$$AK = AN, \quad CK = CM,$$
$$DN = DM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AD,$$

поэтому $AN = \frac{1}{2}AD$. Значит,

$$AC = AK + CK = AN + CM = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}CD = CD = AD.$$

Поэтому треугольник ACD — равносторонний. Следовательно,

$$\angle BAC = \angle DAC = 60°, \quad \angle ABC = 90° - \angle BAC = 30°.$$

1.7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найдите площадь треугольника ABC, если $LM = a$, $CM = b$.

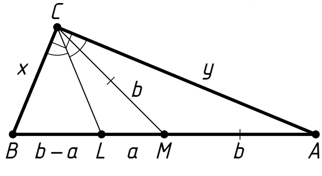
Ответ: $\frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$.

Решение. Заметим, что $AM = MB = b$. Обозначим $BC = x$, $AC = y$. Пусть $x < y$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{x}{y} = \frac{BL}{AL} = \frac{b-a}{b+a}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$BC^2 + AC^2 = AB^2, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 4b^2.$$



Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{b-a}{b+a}, \\ x^2 + y^2 = 4b^2, \end{cases}$$

получим, что $x = \sqrt{2}\frac{b(b-a)}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y = \sqrt{2}\frac{b(b+a)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = \frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}.$$

1.8. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите отрезок CN, если катеты равны 1 и 4.

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Решение. Пусть $AC=4$, $BC=1$. Обозначим $\angle BAC=\alpha$. Прямоугольные треугольники ABC и DFC равны по двум катетам, поэтому

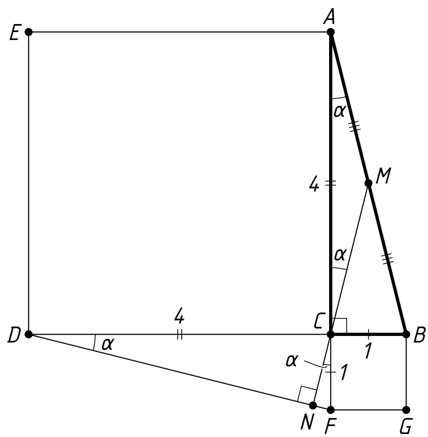
$$DF = AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{17}.$$

Медиана CM прямоугольного треугольника ABC, проведённая к гипотенузе AB, равна половине гипотенузы, поэтому

$$\angle NCF = \angle ACM = \angle BAC = \alpha,$$
$$\angle CNF = 180^\circ - \angle NCF - \angle CFN = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

т. е. CN — высота прямоугольного треугольника CDF, проведённая из вершины прямого угла C. Поскольку $CD\cdot CF=DF\cdot CN$ (удвоенная площадь треугольника CDF),

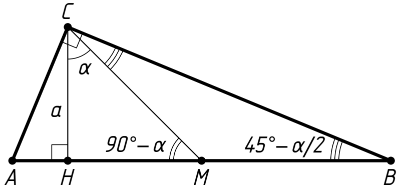
$$CN = \frac{CD\cdot CF}{DF} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$



1.9. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

Ответ: $\frac{a}{\sin\left(45^\circ \pm \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{2(1\pm\sin\alpha)}}{\cos\alpha}$.

Решение. Пусть $CH = a$ — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины C прямого угла, CM — медиана этого треугольника, причём $\angle MCH = \alpha$.



Предположим, что $BC > AC$. Тогда точка M лежит между B и H. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $BM = AM = CM$. Угол CMH — внешний угол равнобедренного треугольника CMB, значит,

$$\angle MBC = \frac{1}{2}\angle CMH = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно,

$$BC = \frac{CH}{\sin\angle HBC} = \frac{a}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Аналогично находим, что

$$AC = \frac{CH}{\sin\angle HAC} = \frac{a}{\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

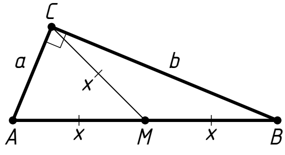
Тренировочные задачи

1.10. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами m и n. Найдите стороны треугольника.

Ответ: $\sqrt{2mn} - m$, $\sqrt{2mn} - n$, $n + m - \sqrt{2mn}$.

Решение. Пусть a и b — катеты треугольника, x — медиана, проведённая к гипотенузе. Тогда гипотенуза равна $2x$.

Предположим, что $a < b$. Тогда по условию задачи $2x + b = m$ и $2x + a = n$. Отсюда следует, что $b = a + m - n$. Поскольку $2x = \sqrt{a^2 + b^2}$, то



$$\begin{cases} b = a + m - n, \\ 2\sqrt{a^2 + b^2} + a + b = m + n. \end{cases}$$

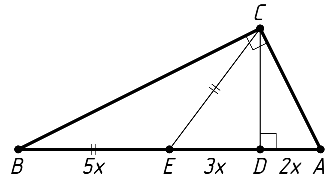
Из этой системы находим, что

$$a = \sqrt{2mn} - m, \quad b = \sqrt{2mn} - n, \quad 2x = n + m - \sqrt{2mn}.$$

1.11. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Решение. Заметим, что



$$\frac{DE}{AB} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3}{10}.$$

Положим $DE = 3x$, $AB = 10x$. Тогда

$$CE = AE = BE = 5x,$$

$$CD = \sqrt{CE^2 - DE^2} = \sqrt{25x^2 - 9x^2} = 4x,$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x = 6x^2 = 3.$$

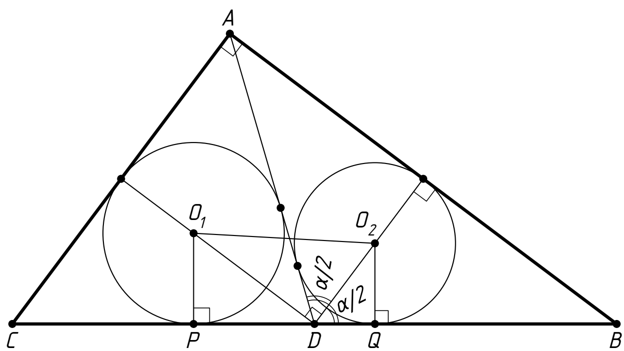
Поэтому

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 10x = 5\sqrt{2}.$$

1.12. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{13}}{12}$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD соответственно, P и Q — их точки касания со стороной BC. Обозначим $\angle ADB = \alpha$.



Из равнобедренного треугольника ADB находим, что

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}, \quad DQ = \frac{1}{2}(DB + AD + AB) - AB = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим, что $DP=1$. Тогда

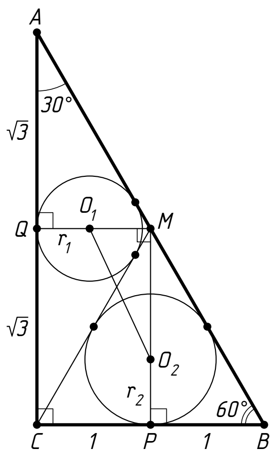
$$DO_2=\frac{DQ}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{5}{6},\quad DO_1=\frac{DP}{\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{DP}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{5}{4},$$

$$O_1O_2^2=DO_1^2+DO_2^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25\cdot13}{144}.$$

Следовательно, $O_1O_2=\frac{5\sqrt{13}}{12}$.

1.13. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

Ответ: $2\sqrt{\frac{22-12\sqrt{3}}{3}}$.



Решение. Пусть M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, $\angle A=30^\circ$, $BC=2$, O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в треугольники AMC и BMC соответственно, r_1 и r_2 — радиусы этих окружностей. Тогда

$$AB=2BC=4,\quad CM=AM=BM=2,$$
$$AC=BC\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

Треугольник BCM — равносторонний, поэтому точка P касания его вписанной окружности со стороной BC — середина BC, MP — средняя линия треугольника ABC,

$$MP=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3},\quad MO_2=\frac{2}{3}MP=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

Треугольник ACM — равнобедренный, поэтому точка Q касания его вписанной окружности со стороной AC — середина AC, MQ — средняя линия треугольника ABC,

$$MQ=\frac{1}{2}BC=1,\quad r_1=O_1Q=\frac{S_{\Delta AMC}}{AM+AQ}=\frac{AQ\cdot MQ}{AM+AQ}=\frac{\sqrt{3}\cdot1}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3,$$
$$MO_1=MQ-O_1Q=1-2\sqrt{3}+3=4-2\sqrt{3}.$$

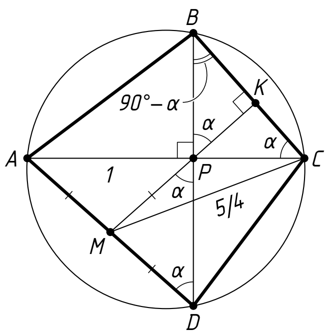
Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому MO_1 и MO_2 — биссектрисы смежных углов AMC и BMC, поэтому $\angle O_1MO_2=90^\circ$, значит, O_1O_2 — гипотенуза прямоугольного треугольника O_1MO_2. По теореме Пифагора находим, что

$$O_1O_2 = \sqrt{MO_2^2 + MO_1^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + (4-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{\frac{22-12\sqrt{3}}{3}}.$$

1.14. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину C с серединой M отрезка AD, равен $\frac{5}{4}$, $AP=1$. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$. Найдите AD, если известно, что вокруг четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Ответ: $\frac{3\sqrt{6}-2}{4}$.

Решение. Пусть прямая MP пересекает отрезок BC в точке K. Обозначим $\angle ADB = \angle ACB = \alpha$. Поскольку PM — медиана прямоугольного треугольника APD, проведённая из вершины прямого угла, то



$$PM = MA = MD,$$
$$\angle BPK = \angle DPM = \angle ADB = \alpha,$$

а т. к. $\angle CBP = 90^\circ - \alpha$, то

$$\angle BKP = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ,$$

т. е. $PK \perp BC$. Значит, $PK = \frac{1}{2}$.

Из прямоугольных треугольников APD и CKP находим, что

$$MP = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}\cdot\frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \quad CK = KP\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha,$$

поэтому

$$MK = MP + KP = \frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}.$$

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику MKC, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2 = \frac{25}{16},$$

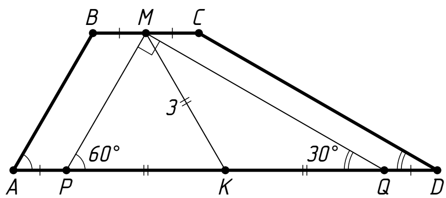
из которого находим, что $\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{6}-2}{4}$. Следовательно,

$$AD = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{3\sqrt{6}-2}{4}.$$

1.15. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.

Ответ: 8; 2; 3.

Решение. Через середину M меньшего основания BC трапеции $ABCD$ проведём прямую, параллельную боковой стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P и прямую, параллельную боковой стороне CD, до пересечения с прямой AD в точке Q.



Если K — середина AD, то

$$PK = AK - AP = AK - BM = DK - MC = DK - QD = KQ,$$

поэтому MK — медиана треугольника PMQ, а т. к.

$$\angle PMQ = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ,$$

то $PK = KQ = MK = 3$. Значит,

$$AD - BC = PQ = 6, \quad AD + BC = 10,$$

откуда находим, что $AD = 8$ и $BC = 2$.

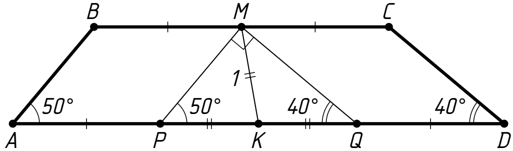
Пусть PM — катет прямоугольного треугольника PMQ, лежащий против угла в 30°. Тогда AB — меньшая боковая сторона трапеции $ABCD$ и

$$AB = PM = \frac{1}{2}PQ = 3.$$

1.16. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.

Ответ: 5 и 3.

Решение. Пусть углы A и D при основании трапеции $ABCD$ равны 50° и 40° соответственно, M и K — середины оснований BC и AD.



Через точку M проведём прямую, параллельную AB, до пересечения с AD в точке P и прямую, параллельную CD до пересечения с AD в точке Q. Тогда

$$PK = AK - AP = AK - BM = KD - CM = KD - QD = KQ.$$

Поскольку

$$\angle PMQ = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ,$$

то MK — медиана прямоугольного треугольника PMQ, проведённая из вершины прямого угла PMQ. Следовательно, $PQ = 2MK = 2$.

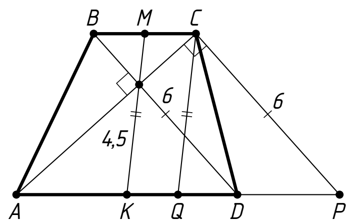
Поскольку

$$PQ = AD - AP - QD = AD - BM - MC = AD - BC,$$

то $AD - BC = 2$. Кроме того, по условию задачи $AD + BC = 8$. Из полученной системы уравнений находим, что $AD = 5$ и $BC = 3$.

1.17. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.

Ответ: $9\sqrt{5}$.



Решение. Пусть M и K — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$. Через вершину C меньшего основания BC проведём прямую, параллельную диагонали BD ($BD = 6$), до пересечения с прямой AD в точке P и прямую, параллельную MK, до пересечения с прямой AD в точке Q. Тогда

$$AQ = AK + KQ = AK + MC = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}AP.$$

Поэтому CQ — медиана треугольника ACP, а т. к. $\angle ACP = 90^\circ$, то $AQ = QP = CQ = MK = 4{,}5$. Поэтому $AP = 9$. Тогда

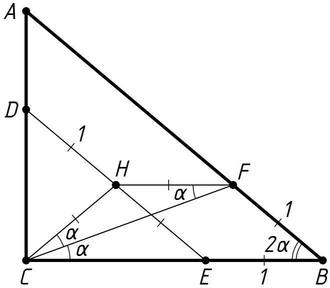
$$AC = \sqrt{AP^2 - CP^2} = \sqrt{81 - 36} = 3\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot CP = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 6 = 9\sqrt{5}.$$

1.18. Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, пересекает катет AC в точке D, а катет BC — в точке E, причём $DE = 2$, а $BE = 1$. На гипотенузе взята такая точка F, что $BF = 1$. Известно также, что $\angle FCB = \alpha$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg} 2\alpha$.



Решение. Пусть H — середина DE. Тогда $HFBE$ — параллелограмм (даже ромб), т. к. $HE = BF$ и $HE \parallel BF$. Поэтому $HF = BE = 1$.

Поскольку $CH = \frac{1}{2}DE = 1$, треугольник CHF — равнобедренный. Поэтому

$$\angle HCF = \angle HFC = \angle FCB = \alpha, \quad \angle HCB = 2\alpha.$$

Тогда

$$\angle B = \angle DEC = \angle HCB = 2\alpha.$$

Следовательно,

$$CE = DE\cos\angle DEC = 2\cos 2\alpha, \quad BC = CE + EB = 2\cos 2\alpha + 1,$$
$$AC = BC\,\mathrm{tg}\,\angle ABC = BC\,\mathrm{tg}\,2\alpha = (2\cos 2\alpha + 1)\,\mathrm{tg}\,2\alpha.$$

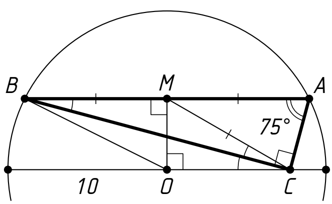
Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}(2\cos 2\alpha + 1)^2\,\mathrm{tg}\,2\alpha.$$

1.19. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC является хордой окружности радиуса 10. Вершина C лежит на диаметре окружности, который параллелен гипотенузе. Угол CAB равен $75°$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 40.

Решение. Из центра O данной окружности опустим перпендикуляр OM на гипотенузу AB. Тогда M — середина AB, $MC = MA = MB$. Поэтому



$$\angle MCB = \angle ABC = 15°,$$
$$\angle BCO = \angle ABC = 15°.$$

Следовательно, $\angle MCO = 30°$.

Пусть $OM = x$. Из прямоугольного треугольника MCO находим, что $MC = 2x$. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике MOB:

$$OB^2 = OM^2 + MB^2, \quad \text{или} \quad 100 = x^2 + 4x^2.$$

Отсюда находим, что $x^2 = 20$. Следовательно,

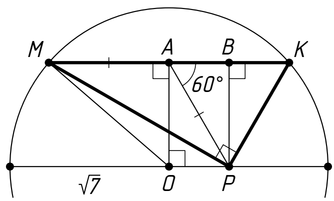
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot OM = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot x = 2x^2 = 40.$$

1.20. Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.

Ответ: $30°$, $60°$.

Решение. Пусть O — центр данной окружности, OA — перпендикуляр к гипотенузе. Тогда A — середина гипотенузы. Из прямоугольного треугольника OMA по теореме Пифагора находим, что

$$AM^2 = OM^2 - OA^2 = 7 - 3 = 4.$$



Значит, $AP = AK = AM = 2$.

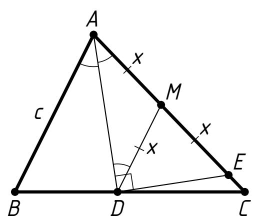
Пусть PB — высота треугольника KMP. Тогда $PB = OA = \sqrt{3}$. Поэтому

$$\sin\angle KAP = \frac{PB}{AP} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, $\angle KAP = 60°$, т. е. треугольник KAP равносторонний, поэтому $\angle MKP = 60°$.

1.21. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $AC = b$ $(b > c)$, AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найдите AE.

Ответ: $\frac{2bc}{b+c}$.

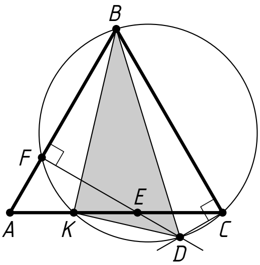


Решение. Пусть M — середина отрезка AE. Тогда DM — медиана прямоугольного треугольника ADE, проведённая из вершины прямого угла. Если $DM = x$, то $AM = ME = DM = x$, $\angle ADM = \angle DAM = \angle BAD$. Значит, $DM \parallel AB$ и треугольник MDC подобен треугольнику ABC, поэтому $\frac{MD}{AB} = \frac{CM}{AC}$, или $\frac{x}{c} = \frac{b-x}{b}$, откуда находим, что $x = \frac{bc}{b+c}$. Следовательно, $AE = 2x = \frac{2bc}{b+c}$.

1.22. Точка E лежит на стороне AC правильного треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD.

Ответ: $90°$, $30°$, $60°$.

Решение. Пусть F — основание перпендикуляра, опущенного из точки E на AB. Тогда FK — медиана прямоугольного треугольника AFE. Поэтому $\angle AKF = 60°$ и $FK \parallel BC$.

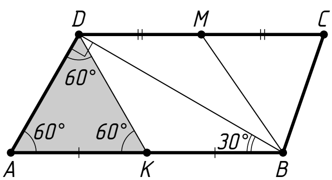


Опишем окружность около равнобедренной трапеции $BFKC$. Точка D принадлежит этой окружности, т. к. $\angle BFD + \angle BCD = 180°$; BD — диаметр этой окружности, т. к. $\angle BCD = 90°$. Следовательно,

$$\angle BKD = 90°, \quad \angle BDK = \angle BCK = 60°,$$
$$\angle KBD = 30°.$$

1.23. В трапеции $ABCD$ точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при основании AB равен $60°$, а периметр равен 30.

Ответ: $15\sqrt{3}$.



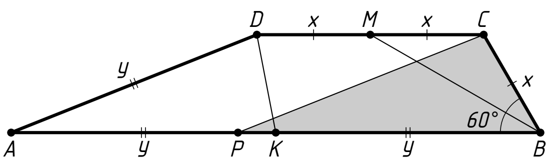
Решение. Пусть K — середина большего основания AB трапеции $ABCD$. Предположим, что $\angle DAB = 60°$ (см. рисунок слева). Поскольку

$$\angle ADK = \angle KDC = \angle AKD,$$

то треугольник ADK — равносторонний, $DK = AK = KB$. Поэтому $\angle ADB = 90°$, а $\angle DBA = 30°$. Но

$$\angle DBA < \angle MBA = \frac{1}{2}\angle ABC,$$

поэтому $\angle ABC > 60°$, что невозможно. Следовательно, $\angle ABC = 60°$ (см. рисунок ниже).



Обозначим $BC = MC = MD = x$, $AD = AK = KB = y$. Тогда $x + y = 10$. Проведём через вершину C прямую, параллельную AD, до пересечения с основанием AB в точке P. В треугольнике BCP известно, что

$$BC = x, \quad CP = AD = y, \quad BP = AB - AP = AB - DC = 2(y - x), \quad \angle CBP = 60°.$$

По теореме косинусов

$$y^2 = x^2 + 4(y - x)^2 - 2x(y - x).$$

Из полученной системы

$$\begin{cases} x+y=10, \\ y^2=x^2+4(y-x)^2-2x(y-x) \end{cases}$$

находим, что $x=3$, $y=7$. Тогда высота трапеции равна $x\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

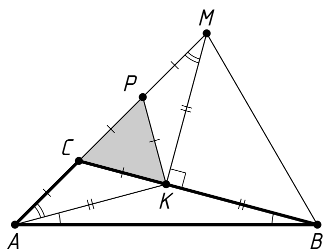
$$S_{ABCD}=(x+y)\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}.$$

1.24. В треугольнике ABC известны углы: $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$. На продолжении стороны AC за точку C взята точка M, причём $CM=2AC$. Найдите угол AMB.

Ответ: 75°.

Решение. Пусть P — середина отрезка CM. Тогда $AC=CP=PM$. Отметим на стороне CB точку K так, чтобы $CK=CA$. По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle PCK=\angle CAB+\angle ABC=45^\circ+15^\circ=60^\circ.$$



Поэтому треугольник CPK — равносторонний. Значит, $PC=PK=PM$. Следовательно, треугольник CKM — прямоугольный и $\angle AMK=90^\circ-60^\circ=30^\circ$. Поскольку $\angle CAK=\angle CKA=30^\circ$, треугольник AKM — равнобедренный, а т. к. $\angle KAB=\angle KBA=15^\circ$, то треугольник AKB — также равнобедренный. Следовательно, $MK=AK=KB$ и треугольник MKB — равнобедренный.

Поскольку $\angle MKB=\angle MKC=90^\circ$, то $\angle KMB=45^\circ$. Следовательно,

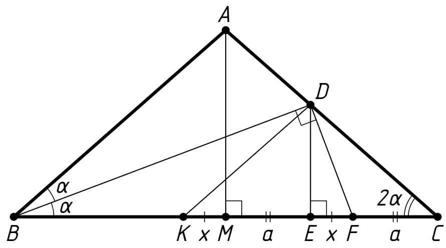
$$\angle AMB=\angle AMK+\angle KMB=30^\circ+45^\circ=75^\circ.$$

1.25. В треугольнике ABC известно, что $AB=AC$ и угол BAC тупой. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC, M — основание перпендикуляра, опущенного из A на сторону BC, E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведён также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME=FC=a$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $\frac{25a^2\sqrt{7}}{12}$.

Решение. Обозначим $EF=x$, $\angle ACB=\angle ABC=2\alpha$. Пусть K — середина отрезка BF. Тогда DK — медиана прямоугольного треугольника BDF. Значит,

$$BK=KD=KF,\quad \angle DKC=2\angle DBK=2\alpha=\angle ACB.$$



Поэтому треугольник CDK — равнобедренный. Его высота DE является медианой, значит,

$$KM+ME=EF+FC, \quad \text{или} \quad KM+a=x+a.$$

Следовательно, $KM=x$. Тогда

$$BK=KF=2x+a, \quad BM=BK+KM=(2x+a)+x=3x+a,$$
$$MC=ME+EF+FC=a+x+a=2a+x,$$

а т. к. $BM=MC$, то $3x+a=2a+x$. Отсюда находим, что $x=\frac{a}{2}$. Тогда

$$CD=DK=BK=2x+a=a+a=2a.$$

Из прямоугольного треугольника CED находим, что

$$\cos 2\alpha=\frac{CE}{CD}=\frac{x+a}{2a}=\frac{\frac{3a}{2}}{2a}=\frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 2\alpha}-1}=\sqrt{\frac{16}{9}-1}=\frac{\sqrt{7}}{3},$$
$$AM=MC\operatorname{tg} 2\alpha=(2a+x)\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{5a}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{5a\sqrt{7}}{6}.$$

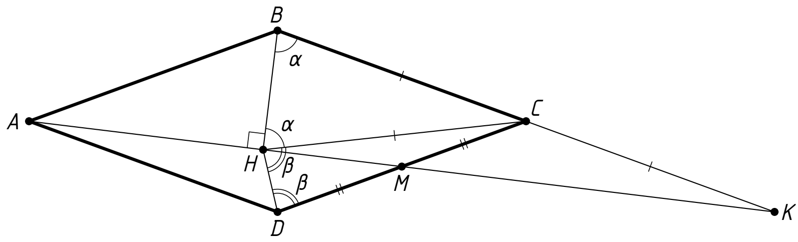
Следовательно,

$$S_{\triangle ABC}=MC\cdot AM=\frac{5a}{2}\cdot\frac{5a\sqrt{7}}{6}=\frac{25a^2\sqrt{7}}{12}.$$

1.26. Острый угол при вершине A ромба $ABCD$ равен $40°$. Через вершину A и середину M стороны CD проведена прямая, на которую опущен перпендикуляр BH из вершины B. Найдите угол AHD.

Ответ: $110°$.

Решение. Продолжим сторону BC до пересечения с прямой AM в точке K. Тогда $CK=AD=BC$, т. е. HC — медиана прямоугольного треугольника BHK, проведённая из вершины прямого угла. Поэтому



$HC=BC=CD$. Обозначим через α и β углы при основаниях BH и DH равнобедренных треугольников BCH и CDH соответственно. Тогда

$$\angle BHD = \alpha + \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BCH + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DCH =$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BCH + \angle DCH) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BCD = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle AHD = 360^\circ - \angle AHB - \angle BHD = 360^\circ - 90^\circ - 160^\circ = 110^\circ.$$

Задачи на доказательство и вычисление

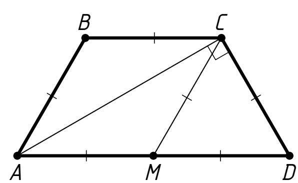
1.27.1. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$.

а) Докажите, что $AC \perp CD$.

б) Найдите углы трапеции.

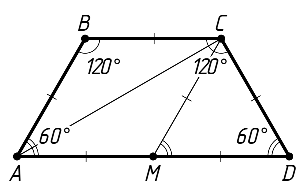
Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

Решение. а) Пусть M — середина AD. Тогда $AM = \frac{1}{2}AD = BC$ и $AM \parallel BC$, поэтому четырёхугольник $ABCM$ — параллелограмм. Значит, $CM = AB = \frac{1}{2}AD$. Медиана CM треугольника ACD равна половине стороны AD. Следовательно, $\angle ACD = 90^\circ$.



б) Поскольку $CD=AB=CM=\frac{1}{2}AD=DM$, треугольник CMD равносторонний. Следовательно,

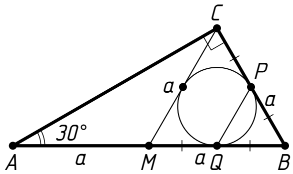
$$\angle ADC=\angle MDC=60^\circ, \quad \angle BAD=\angle ADC=60^\circ,$$
$$\angle BCD=\angle ABC=180^\circ-\angle BAD=120^\circ.$$

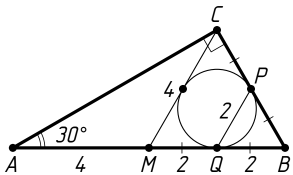


1.28.1. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC с углом 30° при вершине A. Окружность, вписанная в треугольник BMC, касается его сторон BC и BM в точках P и Q.

а) Докажите, что $PQ \parallel CM$.

б) Найдите PQ, если $AB = 8$.





Ответ: 2.

Решение. а) Медиана CM прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины C прямого угла, равна половине гипотенузы, поэтому $CM = BM = \frac{1}{2}AB = BC$. Значит, треугольник BMC равносторонний. Поэтому точки P и Q — середины BC и BM, а PQ — средняя линия треугольника BMC. Следовательно, $PQ \parallel CM$.

б) Средняя линия треугольника BMC равна половине стороны CM, поэтому

$$PQ = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB = \frac{1}{4}AB = 2.$$

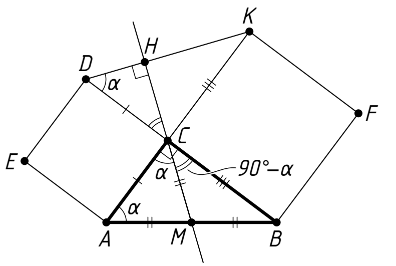
1.29.1. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

Ответ: 49.

Решение. а) Прямоугольные треугольники DCK и ACB равны по двум катетам. Обозначим $\angle CDK = \angle CAB = \alpha$. Отрезок CM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла, поэтому $AM = \frac{1}{2}AB = CM$. Значит,



$$\angle ACM = \angle CAM = \alpha,$$
$$\angle DCH = \angle BCM = 90^\circ - \alpha.$$

Следовательно,

$$\angle CHD = 180^\circ - \angle CDH - \angle DCH = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

б) Пусть $AC = 30$, $BC = 40$. По теореме Пифагора находим, что $AB = 50$. Тогда $CM = \frac{1}{2}AB = 25$. Отрезок CH — высота прямоугольно-

Содержание