# МАТЕМАТИКА

# 2017 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

задача 13

С. А. Шестаков, П. И. Захаров

# УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ФГОС

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

**Шестаков С. А., Захаров П. И.**

Ш51 ЕГЭ 2017. Математика. Уравнения и системы уравнений. Задача 13 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2017. — 176 с.

ISBN 978-5-4439-1083-3

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2017. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 13 профильного уровня.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Уравнения и системы уравнений».

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

*Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.*

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 29.08.2016 г. Формат $60 \times 90$ 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru



**ISBN 978-5-4439-1083-3**

# Диагностическая работа

## Часть I. Уравнения

Решите уравнение.

**1.** $3(6x^2-13x+6)^2-10(6x^2-13x)=53.$

**2.** $|x^2-9|+|x+3|=x^2+x-6.$

**3.** $\dfrac{x^7-4x^5+4x^2-7x-2}{x^7-4x^5+3x^2-4x-4}=1.$

**4.** $\dfrac{2}{x^2-2x-3}+\dfrac{x-5}{x^2-1}=\dfrac{1}{x^2-4x+3}.$

**5.** $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6.$

**6.** $\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}+3\sqrt{\dfrac{x-1}{3-x}}=4.$

**7.** $\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=0.$

**8.** $\arcsin x(4\arcsin x+\arccos x)=\pi^2.$

**9.** $x\cdot 2^x+3=3\cdot 2^x+x.$

**10.** $4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18.$

**11.** $\log_3(x^2-12)+0{,}5\log_{\frac{1}{3}}x^2=0.$

**12.** $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0.$

## Часть II. Системы уравнений

Решите систему уравнений.

**1.** $\begin{cases} xy+x+y=11, \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=-0{,}5. \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} \dfrac{x^2+2y^2}{y}=3, \\ \left(\dfrac{x^2+2y^2}{y}\right)^2=x^2+2y^2-3y+9x. \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7, \\ \sqrt{xy}=10. \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23. \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} \sqrt{y+\cos^2 x-2}+\cos x=0, \\ y\sin^2 x-\sin x-1=0. \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0, \\ y+4\sqrt{3}\cos x=0. \end{cases}$

**9.** $\begin{cases} \dfrac{81^{\cos y}-4\cdot 9^{\cos y}+3}{\sqrt{1-2\sin y}}=0, \\ \sqrt{x+3}+\cos 2y+1=0. \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} 3\cdot 3^{\operatorname{tg} y}+2=3^{-\operatorname{tg} y}, \\ \sqrt{x-2}+6\cos y=0. \end{cases}$

**11.** $\begin{cases} 8\log_9(xy)=\log_9 x^8, \\ 5x+2y+22=0. \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} \dfrac{2\log_2^2(\sin x)+3\log_2(\sin x)+1}{\log_3(-\cos x)}=0, \\ \sqrt{y-7}=\sqrt{2}\cos x+1. \end{cases}$

# Часть I. Уравнения

Главным этапом решения любого уравнения является сведе́ние его к одному или нескольким простейшим уравнениям. Под простейшими уравнениями в зависимости от принадлежности к той или иной функционально-числовой линии школьного курса подразумеваются следующие:

• для целых рациональных уравнений — линейные и квадратные уравнения;

• для дробно-рациональных уравнений — уравнения вида $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены первой или второй степени;

• для иррациональных уравнений — уравнения вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$, где $f(x)$ — многочлен первой или второй степени, $g(x)$ — многочлен степени не выше первой;

• для тригонометрических уравнений — уравнения вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, где $a$ — действительное число;

• для показательных уравнений — уравнения вида $a^{f(x)}=b$, где $a$ — положительное действительное число, отличное от единицы, $b$ — действительное число, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени;

• для логарифмических уравнений — уравнения вида $\log_a f(x)=b$, где $b$ — действительное число, $a$ — положительное действительное число, отличное от 1, $f(x)$ — многочлен первой или второй степени.

Существует два основных способа сведения уравнения к одному или нескольким простейшим: алгебраические преобразования и замена переменной. Кроме того, решение некоторых уравнений требует применения таких свойств функций, как монотонность и ограниченность.

# § 1. Целые рациональные уравнения

Как уже отмечалось, простейшими целыми (слово «рациональные» иногда будем опускать) уравнениями являются линейные и квадратные. Решение практически любых целых уравнений, в том числе и тех, которые получены из дробно-рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений посредством замены переменной либо иным способом, сводится к решению линейных и квадратных уравнений. Поэтому умение быстро и без ошибок решать линейные и квадратные уравнения является одним из важнейших: обидно, придумав способ решения относительно сложной задачи и сведя ее к линейному или квадратному уравнению, ошибиться на последнем шаге. Далее решение линейных и квадратных уравнений не рассматривается (рекомендуется решать их самостоятельно), а сразу после их приведения к стандартному виду выписываются корни.

Рассмотрим основные способы решения целых рациональных уравнений.

## 1. Алгебраические преобразования

Одним из основных способов сведения уравнения к одному или нескольким простейшим являются алгебраические преобразования одной или обеих его частей. В таких случаях, как правило, все члены уравнения переносят в одну из его частей, приводят подобные и пытаются разложить полученное выражение на множители. Для целых уравнений с этой целью обычно используют формулы сокращенного умножения. Иногда, чтобы применить одну из формул сокращенного умножения, требуется применить искусственное преобразование: добавить и вычесть некоторое выражение. Если удается «угадать» корень целого рационального уравнения степени выше второй, т. е. корень $x_0$ многочлена $p(x)$ в левой части уравнения $p(x)=0$, то можно понизить степень уравнения, воспользовавшись тем, что тогда $p(x)=(x-x_0)q(x)$ и степень многочлена $q(x)$ ниже степени многочлена $p(x)$. Для получения формулы $p(x)=(x-x_0)q(x)$ используют либо разложение на множители, либо деление столбиком многочлена $p(x)$ на $x-x_0$. В некоторых случаях для того чтобы свести уравнение к линейному или квадратному, достаточно воспользоваться условием равенства степеней. Рассмотрим примеры решения целых уравнений с помощью алгебраических преобразований, начав с линейных и квадратных уравнений с иррациональными коэффициентами, которые, несмотря на их принадлежность к простейшим, порой вызывают неразрешимые трудности у выпускников именно в силу иррациональности коэффициентов.

**Пример 1.** Решите уравнение

$$2\left(\sqrt{3}-x\right)+\sqrt{3}(2-x)=2\sqrt{3}-4.$$

**Решение.** Данное уравнение является линейным. Выполним необходимые преобразования:

$$2\left(\sqrt{3}-x\right)+\sqrt{3}(2-x)=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}-2x+2\sqrt{3}-\sqrt{3}x=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}+2\right)x=2\sqrt{3}-4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}+2\right)x=2\sqrt{3}+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}+2} \Leftrightarrow x=\frac{2\left(\sqrt{3}+2\right)}{\sqrt{3}+2} \Leftrightarrow x=2.$$

*Ответ*: 2.

**Пример 2.** Решите уравнение

$$2x^2-\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}+2=0.$$

**Решение.** Данное уравнение является квадратным. Найдем дискриминант $D$ уравнения:

$$D=\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)^2-4\cdot 2\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)=$$
$$=12+12\sqrt{6}+18-8\sqrt{6}-16=14+4\sqrt{6}.$$

Дискриминант представляет собой выражение вида $p+q\sqrt{r}$. В том случае, если это выражение является полным квадратом, обычно используют рассуждения, аналогичные следующим. Предположим, что дискриминант является квадратом суммы чисел $a$ и $b$:

$$(a+b)^2=14+4\sqrt{6}.$$

Пусть сумма квадратов этих чисел равна 14, а их удвоенное произведение равно $4\sqrt{6}$. Тогда $ab=2\sqrt{6}$. Наиболее вероятными «претендентами» на роль $a$ и $b$ являются либо 2 и $\sqrt{6}$, либо $2\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, либо $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Поскольку сумма квадратов искомых чисел равна 14, то это числа $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$. Следовательно, $\sqrt{D}=2\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Тогда по формуле корней квадратного уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}, \\ x_2=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}, \\ x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

*Ответ*: $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

*Условие равенства степеней*

Уравнение вида $(g(x))^{2n+1} = (p(x))^{2n+1}$, где $n$ — натуральное число, в силу свойств степенной функции с нечетным натуральным показателем равносильно уравнению $g(x) = p(x)$. Уравнение вида $(g(x))^{2n} = (p(x))^{2n}$, где $n$ — натуральное число, в силу свойств степенной функции с четным натуральным показателем равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} p(x)=q(x), \\ p(x)=-q(x). \end{array}\right.$

**Пример 3.** Решите уравнение

$$(x-3)^6 + (x^2-2x-1)^3 = 0.$$

**Решение.** Перепишем уравнение в виде

$$(x-3)^6 = -(x^2-2x-1)^3.$$

Далее, поскольку $a^6 = (a^2)^3$, $-b^3 = (-b)^3$, получим

$$((x-3)^2)^3 = (-x^2+2x+1)^3.$$

В силу того, что $c^3 = d^3 \iff c = d$, последнее уравнение приводится к виду $(x-3)^2 = -x^2+2x+1$. Перенеся все члены уравнения в левую часть, раскрыв скобки, приведя подобные и разделив обе части полученного уравнения на число 2, получим квадратное уравнение $x^2-4x+4=0$, единственным корнем которого является 2.

*Ответ*: 2.

*Разложение на множители*

Среди целых уравнений степени выше второй, решаемых с помощью разложения на множители (для чего применяют формулы сокращенного умножения и вынесение за скобку общего множителя), можно выделить симметрическое уравнение третьего порядка $ax^3+bx^2+bx+a=0$. Перегруппировав слагаемые и вынося за скобку общие множители, получим $a(x^3+1)+bx(x+1)=0$. Применим в левой части уравнения формулу суммы кубов и вновь вынесем общий множитель за скобку:

$$a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1) = (x+1)(ax^2-ax+a+bx).$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному уравнению $x+1= =0$, корнем которого является число $-1$, и квадратному уравнению $ax^2-(a-b)x+a=0$.

Отметим, что для большинства других целых уравнений степени выше второй стандартный алгоритм решения указать не удается, но практически всегда в их решении можно существенно продвинуться, следуя одной из трех «инструкций», или «правил»: «примени формулу», «добавь и вычти», «угадай корень». Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 4.** Решите уравнение

$$5x^3-21x^2-21x+5=0.$$

**Решение.** Перегруппировав слагаемые и вынося за скобку общие множители, получим $5(x^3+1)-21x(x+1)=0$. Применим в левой части уравнения формулу суммы кубов и вновь вынесем общий множитель за скобку:

$$5(x+1)(x^2-x+1)-21x(x+1)=(x+1)(5x^2-26x+5).$$

Таким образом, уравнение сводится к линейному уравнению $x+1=0$, корнем которого является число $-1$, и квадратному уравнению $5x^2-26x+5=0$, корнями которого являются числа $\frac{1}{5}$ и 5.

*Ответ*: $-1$; $\frac{1}{5}$; 5.

**Пример 5.** Решите уравнение

$$x^4-2x^3+x^2-9=0.$$

**Решение.** Этот пример иллюстрирует применение формул сокращенного умножения. Сначала воспользуемся формулой квадрата разности двух чисел: $x^4-2x^3+x^2=(x^2-x)^2$. Теперь уравнение можно переписать так: $(x^2-x)^2-3^2=0$. Применив формулу разности квадратов, получим $(x^2-x-3)(x^2-x+3)=0$, откуда $x^2-x-3=0$ либо $x^2-x+3=0$. Корнями уравнения $x^2-x-3=0$ являются числа $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Уравнение $x^2-x+3=0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

*Ответ*: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

**Пример 6.** Решите уравнение

$$(x-4)^3+(x-4)^2+(x-4)(x-3)+(x-3)^2+(x-3)^3=6.$$

**Решение.** Для решения уравнения вновь воспользуемся правилом «примени формулу». Выражение

$$(x-4)^2+(x-4)(x-3)+(x-3)^2$$

представляет собой неполный квадрат суммы чисел $x-3$ и $x-4$. Поэтому если умножить его на разность этих чисел $(x-3)-(x-4)$, получим разность кубов этих чисел. Но $(x-3)-(x-4)=1$, поэтому

$$(x-4)^2+(x-4)(x-3)+(x-3)^2 = (x-3)^3-(x-4)^3.$$

Теперь уравнение можно переписать так:

$$(x-4)^3+(x-3)^3-(x-4)^3+(x-3)^3 = 6,$$

откуда, приведя подобные и разделив обе части уравнения на число 2, получаем $(x-3)^3=3$. Значит, $x-3=\sqrt[3]{3}$, и $x=3+\sqrt[3]{3}$.

*Ответ*: $3+\sqrt[3]{3}$.

**Пример 7.** Решите уравнение $x^4+4x-1=0$.

**Решение.** Для того чтобы решить это уравнение, попробуем применить к его левой части правило «добавь и вычти», дополнив $x^4$ до квадрата суммы:

$$x^4+4x-1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2+4x-2 = \\ = (x^2+1)^2-2(x^2-2x+1) = (x^2+1)^2-2(x-1)^2.$$

Далее,

$$(x^2+1)^2-2(x-1)^2 = (x^2+1)^2-\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)^2 = \\ = \left(x^2+1+\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}x+\sqrt{2}\right).$$

Получаем два квадратных уравнения:

$$x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2} = 0 \quad \text{и} \quad x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2} = 0.$$

Корнями уравнения $x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0$ являются числа

$$\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

Уравнение $x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

*Ответ*: $\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$; $\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

**Пример 8.** Решите уравнение $2x^3+3x^2-1=0$.

**Решение.** Левая часть уравнения представляет собой многочлен третьей степени с целыми коэффициентами. Для решения уравнения такого типа следует применить инструкцию «угадай корень», выяснив, не является ли какое-нибудь целое число $x_0$ корнем уравнения. Такое число нужно искать среди делителей свободного члена. В самом деле, если $x_0$ — корень какого-либо целого уравнения с целыми коэффициентами, например, уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, то при его подстановке в уравнение получим верное числовое равенство $ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d=0$. Так как каждое из трех первых слагаемых левой части этого равенства делится на $x_0$, то и последнее слагаемое $d$ должно делиться на $x_0$. Аналогичные рассуждения применимы и для уравнений степени выше третьей. Если такое число $x_0$ существует, то левую часть уравнения можно будет разложить на множители, одним из которых является $x-x_0$. Для этого следует «разбить на пары» левую часть уравнения таким образом, чтобы в каждой паре можно было выделить множитель $x-x_0$, либо выполнить деление многочлена на многочлен столбиком. Так, число $-1$ является корнем данного уравнения, в чем можно убедиться простой проверкой. Теперь левую часть уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$2x^3+3x^2-1=(2x^3+2x^2)+(x^2-1)=$$
$$=2x^2(x+1)+(x+1)(x-1)=(x+1)(2x^2+x-1).$$

Таким образом, $x=-1$ либо $2x^2+x-1=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $-1$ и 0,5.

*Ответ*: $-1$; 0,5.

*Уравнения, содержащие более одной переменной*

Уравнения, содержащие более одной переменной, обычно ставят в тупик недостаточно подготовленного выпускника, хотя в большинстве случаев их решение не требует изощренных преобразований или нестандартных подходов. Как правило, такие уравнения являются квадратными относительно одной из переменных, и ключевая идея заключается в исследовании дискриминанта уравнения: из условия его неотрицательности находятся допустимые значения второй переменной.

**Пример 9.** Найдите все пары $(x; y)$ чисел $x$ и $y$, для каждой из которых $5x^2-4xy+y^2-8x+2y+5=0$.

**Решение.** Переписав данное уравнение как квадратное относительно $x$, получим

$$5x^2-4(y+2)x+y^2+2y+5=0.$$

Пусть $D$ — дискриминант уравнения, тогда

$$\frac{D}{4}=4(y+2)^2-5(y^2+2y+5),$$

откуда, раскрыв скобки и приведя подобные, находим

$$\frac{D}{4}=-y^2+6y-9=-(y-3)^2.$$

Если $y \neq 3$, то $\dfrac{D}{4} < 0$, и уравнение не имеет решений. Если $y = 3$, то $\dfrac{D}{4} = 0$, и тогда $x = \dfrac{2(y+2)}{5} = 2$.

*Ответ*: (2; 3).

## 2. Замена переменной

*Уравнение вида* $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$

Такие уравнения (их иногда называют трехчленными) являются одними из наиболее распространенных. Наверное, самый известный пример этого типа уравнений — биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (здесь $f(x) = x^2$). Заменой переменной $t = f(x)$ трехчленное уравнение сводится к квадратному относительно переменной $t$ уравнению $at^2 + bt + c = 0$. В качестве первого примера подобного типа уравнений рассмотрим **задачу 1 части I** вводной диагностической работы.

**Пример 1.** Решите уравнение

$$3(6x^2 - 13x + 6)^2 - 10(6x^2 - 13x) = 53.$$

**Решение.** Обозначим $6x^2 - 13x + 6$ через $t$. Тогда $6x^2 - 13x = t - 6$ и уравнение примет вид $3t^2 - 10(t-6) = 53$, откуда $3t^2 - 10t + 7 = 0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и $\dfrac{7}{3}$. Сделаем обратную замену. При $t = 1$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = 1$, откуда $6x^2 - 13x + 5 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{5}{3}$. При $t = \dfrac{7}{3}$ получим уравнение $6x^2 - 13x + 6 = \dfrac{7}{3}$, откуда, умножив обе части уравнения на 3, получаем $18x^2 - 39x + 18 = 7$ и, значит, $18x^2 - 39x + 11 = 0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{11}{6}$.

*Ответ*: $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{11}{6}$.

**Пример 2.** Решите уравнение

$$3(2x-1)^4 - 16(2x-1)^2 + 16 = 0.$$

**Решение.** Сделаем замену переменной: $z = (2x-1)^2$, $z \geqslant 0$. Уравнение примет вид: $3z^2 - 16z + 16 = 0$. Корни этого уравнения: $\left[\begin{array}{l} z = 4, \\ z = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$

Условию $z \geqslant 0$ удовлетворяет каждый из корней уравнения. Вернемся к переменной $x$:

$$\left[\begin{array}{l}(2x-1)^2 = 4,\\ (2x-1)^2 = \frac{4}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1 = 2,\\ 2x-1 = -2,\\ 2x-1 = \sqrt{\frac{4}{3}},\\ 2x-1 = -\sqrt{\frac{4}{3}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{3}{2},\\ x = -\frac{1}{2},\\ x = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}},\\ x = \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}.\end{array}\right.$$

*Ответ*: $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}$; $\frac{3}{2}$.

*Уравнение вида* $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k$, *где* $a+b=c+d$

Уравнение указанного типа после перемножения двух первых и двух последних скобок в левой части легко преобразовать к виду

$$(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(a+b)x+cd) = k$$

и свести к квадратному заменой

$$t = x^2-(a+b)x \quad \text{или} \quad t = x^2-(a+b)x+ab.$$

Иногда левая часть таких уравнений представляет собой произведение двух квадратных трехчленов и требует предварительного разложения каждого из них на множители.

**Пример 3.** Решите уравнение $(x^2-4x+3)(x^2+6x+8)+24=0$.

**Решение.** Разложим каждый из квадратных трехчленов в левой части уравнения на множители. Корнями трехчлена $x^2-4x+3$ являются числа 1 и 3, поэтому $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$. Корнями трехчлена $x^2+6x+8$ являются числа $-4$ и $-2$, поэтому

$$x^2+6x+8 = (x+4)(x+2).$$

Теперь данное уравнение можно переписать в виде

$$(x-1)(x-3)(x+4)(x+2)+24 = 0.$$

Поскольку $1+(-2)=3+(-4)$, перемножим скобки левой части полученного уравнения следующим образом: первую с последней, а вторую с третьей. Получим $(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24=0$. Сделаем замену переменной. Пусть $t=x^2+x-2$. Тогда $x^2+x-12=t-10$, и уравнение примет вид $t(t-10)+24=0$, откуда $t^2-10t+24=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 4 и 6. Сделаем обратную замену. При $t=4$ получим уравнение $x^2+x-2=4$, откуда $x^2+x-6=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $-3$ и 2. При $t=6$ получим уравнение $x^2+x-2=6$, откуда $x^2+x-8=$ $=0$. Корнями этого уравнения являются числа $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$ и $\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$.

*Ответ*: $\frac{-1-\sqrt{33}}{2}$; $-3$; 2; $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

*Уравнение вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=kx^2$, где $ab=cd\neq 0$*

Такие уравнения сводятся к квадратным после следующих преобразований. Перемножим две первые и две последние скобки левой части с учетом того, что $ab=cd$:

$$(x^2-(a+b)x+ab)(x^2-(c+d)x+ab) = kx^2.$$

Теперь, учитывая то, что $x\neq 0$ (иначе одно из чисел $a, b, c, d$ должно быть равно нулю, а это противоречит условию), разделим обе части уравнения на $x^2$ следующим образом:

$$\left(\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x}\right)\left(\frac{x^2-(c+d)x+ab}{x}\right) = k,$$

откуда $\left(x+\frac{ab}{x}+(a+b)\right)\left(x+\frac{ab}{x}+(c+d)\right)=k$.

Обозначив $t=x+\frac{ab}{x}$ или $t=x+\frac{ab}{x}+a+b$, получим квадратное уравнение.

**Пример 4.** Решите уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

**Решение.** Перемножим первую и последнюю, а также вторую и третью скобки левой части:

$$(x^2+14x+24)(x^2+11x+24) = 4x^2.$$

Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения, и разделим обе части уравнения на $x^2$ следующим образом:

$$\left(\frac{x^2+14x+24}{x}\right)\left(\frac{x^2+11x+24}{x}\right) = 4.$$

Выполним почленное деление в каждой из скобок левой части последнего уравнения и перегруппируем слагаемые:

$$\left(x+\frac{24}{x}+14\right)\left(x+\frac{24}{x}+11\right) = 4.$$

Теперь можно сделать замену переменной. Пусть $t=x+\frac{24}{x}+14$. Тогда $x+\frac{24}{x}+11=t-3$ и уравнение примет вид $t(t-3)=4$, откуда $t^2-3t-4=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа $-1$ и 4. Сделаем обратную замену. При $t=-1$ получим уравнение $x+\frac{24}{x}+14=-1$, откуда $x^2+15x+24=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}$ и $\dfrac{-15+\sqrt{129}}{2}$. При $t=4$ получим уравнение $x+\dfrac{24}{x}+14=4$, откуда $x^2+10x+24=0$. Корнями этого уравнения являются числа $-6$ и $-4$.

*Ответ*: $\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}$; $-6$; $-4$; $\dfrac{-15+\sqrt{129}}{2}$.

*Уравнение вида $a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0$*

Такое уравнение называется однородным уравнением второго порядка. Оно сводится к квадратному уравнению после деления обеих частей на $g^2(x)$ и введения новой переменной $t=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Следует подчеркнуть, что при делении на $g^2(x)$ может произойти потеря корней уравнения, поэтому обязательной является проверка тех значений $x$, при которых $g^2(x)=0$. Если эти значения являются корнями исходного уравнения, то их также следует включить в ответ. Другой способ решения однородного уравнения состоит в рассмотрении его как квадратного относительно одной из функций $f(x)$ или $g(x)$.

**Пример 5.** Решите уравнение

$$x^2(x-1)^2+x(x^2-1)=2(x+1)^2.$$

**Решение.** Перепишем уравнение следующим образом:

$$(x^2-x)^2+(x^2-x)(x+1)-2(x+1)^2=0.$$

Заметим, что $x=-1$ не является корнем уравнения, и разделим обе части уравнения на $(x+1)^2$. Получим

$$\left(\frac{x^2-x}{x+1}\right)^2+\frac{x^2-x}{x+1}-2=0.$$

Сделаем замену переменной. Пусть $t=\dfrac{x^2-x}{x+1}$. Тогда уравнение примет вид $t^2+t-2=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и $-2$. Сделаем обратную замену. При $t=1$ получим уравнение $\dfrac{x^2-x}{x+1}=1$, откуда $x^2-2x-1=0$. Корнями последнего уравнения являются числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. При $t=-2$ получим уравнение $\dfrac{x^2-x}{x+1}=-2$, откуда $x^2+x+2=0$. Это уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен.

*Ответ*: $1-\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$.

*Уравнение вида $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, где $a\neq 0$*

Такое уравнение, коэффициенты которого симметричны относительно середины, называется возвратным уравнением четвертого порядка. К квадратному уравнению его можно свести следующим образом. Вынесем общие множители и перегруппируем слагаемые в левой части уравнения:

$$a(x^4+1)+b(x^3+x)+cx^2=0.$$

Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения (иначе $a=0$, что противоречит условию). Разделив обе части последнего уравнения на $x^2$, получим

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Теперь уравнение можно переписать так: $a(t^2-2)+bt+c=0$. Последнее уравнение является квадратным относительно переменной $t$.

Схожее с рассмотренным уравнение вида

$$ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$$

можно свести к квадратному аналогичным образом, получив уравнение

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0$$

и сделав замену переменной $t=x-\frac{1}{x}$, откуда

$$t^2=x^2-2+\frac{1}{x^2},\quad x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2,$$

и, следовательно, $a(t^2+2)+bt+c=0$.

**Пример 6.** Решите уравнение $x^4-3x^3+4x^2-3x+1=0$.

**Решение.** Заметим, что $x=0$ не является корнем уравнения. Разделив обе части последнего уравнения на $x^2$, перегруппировав слагаемые в левой части и вынеся за скобку общий множитель, получим

$$x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Теперь уравнение можно переписать так: $t^2-2-3t+4=0$, откуда $t^2-3t+2=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа 1 и 2. Сделаем обратную замену. При $t=1$ получим уравнение $x+\frac{1}{x}=1$, откуда $x^2-x+1=0$. Это уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен. При $t=2$ получим уравнение $x+\frac{1}{x}=2$, откуда $x^2-2x+1=0$. Единственным корнем последнего уравнения является число 1.

*Ответ*: 1.

# Содержание