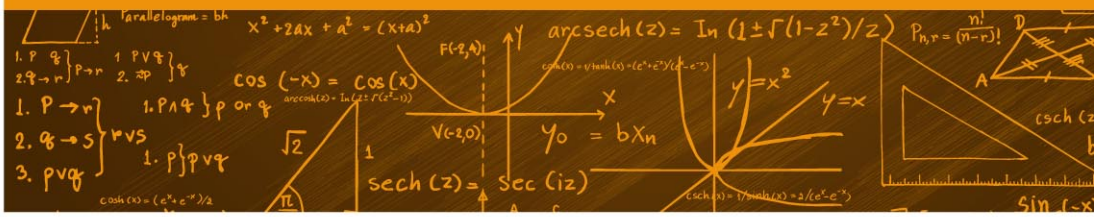
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

АКАДЕМИЧЕСКИЙ УЧЕБНИК

Владимир Носко

ЭКОНОМЕТРИКА

Книга 2



Издательский дом ДЕЛО

УДК 330.43(078.8)
ББК 65в6я73
Н84

Рецензент:
И. И. Елисеева, доктор экономических наук,
профессор, член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки РФ,
зав. кафедрой статистики и эконометрики Санкт-Петербургского
государственного университета экономики и финансов

Носко, В. П.

Н84 Эконометрика: в 2 кн. Книга 2 / В. П. Носко. — Москва : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2021. — 592 с. — (Академический учебник).
ISBN 978-5-85006-293-4 (общий), ISBN 978-5-85006-295-8 (кн. 2).

В учебнике излагаются методы эконометрического анализа — от самых простых до весьма продвинутых. В основе учебника — курсы лекций, прочитанные автором в Институте экономической политики им. Е. Т. Гайдара, на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова и на экономическом факультете РАНХиГС.
Учебник состоит из двух книг (четырех частей): в книге 1 рассматриваются линейные модели регрессии, модели стационарных и нестационарных временных рядов, особенности регрессионного анализа для стационарных и нестационарных переменных; в книге 2 — модели одновременных уравнений, модели с дискретными и цензурированными объясняемыми переменными, модели для анализа панельных данных, модель стохастической границы производственных возможностей, а также дополнительный материал по анализу временных рядов (прогнозирование, методология векторных авторегрессий и др.). В каждой части учебника имеется словарь употребляемых в ней терминов.
Для студентов, аспирантов, преподавателей, а также для специалистов по прикладной экономике.

УДК 330.43(078.8)
ББК 65в6я73

ISBN 978-5-850066-293-4 (общ.)
ISBN 978-5-850006-295-8 (кн. 2)

© ФГБОУ ВО «Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации», 2021

Содержание

Предисловие 7

Предисловие ко второй книге 9

Часть III
СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ, ПАНЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ, МОДЕЛИ С ДИСКРЕТНЫМИ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЯСНЯЕМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Раздел 1. Системы одновременных уравнений 13
Тема 1.1. Идентифицируемость структурной формы системы одновременных уравнений 13
Тема 1.2. Оценивание систем одновременных уравнений 26

Раздел 2. Структурные и приведенные формы моделей коррекции ошибок 93
Тема 2.1. Структурные и приведенные формы векторных авторегрессий и моделей коррекции ошибок 93

Раздел 3. Панельные данные 113
Тема 3.1. Панельные данные: модель пула, модель ковариационного анализа, модель кажущихся несвязанными регрессий 113
Тема 3.2. Модели с фиксированными и случайными эффектами 137
Тема 3.3. Двунаправленные модели 164
Тема 3.4. Несбалансированные панели, эндогенные объясняющие переменные, модели с индивидуально-специфическими переменными 171
Тема 3.5. Динамические модели 181

Раздел 4. Модели с дискретными и ограниченными объясняемыми переменными 193
Тема 4.1. Модели, в которых объясняемая переменная принимает только два различных значения 193
Тема 4.2. Модели, в которых объясняемая переменная принимает несколько различных значений 220
Тема 4.3. Цензурированные модели регрессии (тобит-модели) 236
Тема 4.4. Модели бинарного выбора для панельных данных 258
Тема 4.5. Тобит-модели для панельных данных 269

Задания для семинарских занятий, работы в компьютерном классе и для самостоятельной работы 278
Приложение. Статистические данные к заданиям 317
Литература 321
Глоссарий 323

Часть IV
ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ: ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ. МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ

Раздел 5. Сглаживание и прогнозирование временных рядов 341
Тема 5.1. Адаптивные методы, метод наименьших квадратов 341
Тема 5.2. Прогнозирование по моделям AR, MA, ARMA, ARIMA 372

Раздел 6. Методология векторных авторегрессий 405
Тема 6.1. Прогнозирование по модели векторной авторегрессии, проверка наличия причинности по Грейнджеру для двух и более рядов 405
Тема 6.2. Методология VAR 427
Тема 6.3. Эмпирические исследования 455
Тема 6.4. Нестабильные VAR 481

Раздел 7. Тесты на единичные корни и нелинейные преобразования. Динамический метод наименьших квадратов 501
Тема 7.1. Тесты на единичные корни и нелинейные преобразования 501
Тема 7.2. Динамический метод наименьших квадратов для оценивания коинтегрирующего вектора системы интегрированных рядов 515

Раздел 8. Модель стохастической границы 527
Тема 8.1. Модель стохастической границы для перекрестной выборки 527
Тема 8.2. Модели стохастической границы для панельных данных 542

Задания для семинарских занятий, работы в компьютерном классе и для самостоятельной работы 548
Приложение. Таблицы статистических данных к заданиям 571
Литература 576
Глоссарий 581
Предметный указатель 587

Часть 3

СИСТЕМЫ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ, ПАНЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ, МОДЕЛИ С ДИСКРЕТНЫМИ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ОБЪЯСНЯЕМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Раздел 1
Системы одновременных уравнений

Тема 1.1. Идентифицируемость структурной формы системы одновременных уравнений

В разделе 6 первой части учебника уже рассматривалась система одновременных уравнений, соответствующая модели замкнутой экономики без правительства. В этой модели уравнение

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t,$$

где C_t — реальное потребление на душу населения, Y_t — реальный доход на душу населения, ε_t — случайная ошибка, дополняется соотношением

$$Y_t = C_t + I_t,$$

где I_t — реальные инвестиции на душу населения.

Это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_t, \\ Y_t = C_t + I_t. \end{cases}$$

О такой системе уравнений говорят как о **структурной форме системы одновременных уравнений** (*structural form of simultaneous equations*), подразумевая под этим, что она представляет в явном виде взаимные связи между входящими в модель переменными, показывает, как эти переменные взаимодействуют друг с другом (в данном случае Y_t воздействует на C_t, а C_t воздействует на Y_t — см. рис. 1.1). В структурной форме модели одновременных уравнений переменная, являющаяся объясняемой переменной в одном из уравнений, может входить в другое уравнение в качестве объясняющей переменной.

Выражая из этой системы C_t и Y_t через I_t, мы получаем **приведенную форму системы одновременных уравнений** (*reduced form of simultaneous equations*) в виде:

$$\begin{cases} C_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{\beta}{1-\beta} I_t + \dfrac{1}{1-\beta}\varepsilon_t, \\ Y_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{1}{1-\beta} I_t + \dfrac{1}{1-\beta}\varepsilon_t, \end{cases}$$

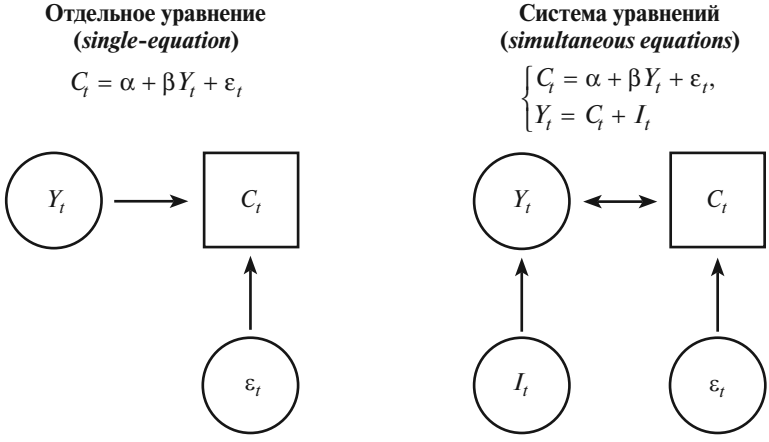


Рис. 1.1

или

$$\begin{cases} C_t = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} I_t + \tilde{\varepsilon}_t, \\ Y_t = \tilde{\gamma} + \tilde{\delta} I_t + \tilde{\varepsilon}_t, \end{cases}$$

где

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\gamma} = \frac{\alpha}{1-\beta}, \ \tilde{\beta} = \frac{\beta}{1-\beta}, \ \tilde{\delta} = \frac{1}{1-\beta},$$

$$\tilde{\varepsilon}_t = \frac{\varepsilon_t}{1-\beta}, \ E(\tilde{\varepsilon}_t) = 0, \ D(\tilde{\varepsilon}_t) = \sigma^2_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{(1-\beta)^2}.$$

В такой форме взаимодействие между C_t и Y_t уже не представлено в явном виде, однако коэффициенты приведенной формы отражают итог взаимодействия этих переменных.

В разд. 6 ч. 1 предполагали, что $\varepsilon_t \sim i.i.d.$, $E(\varepsilon_t) = 0$, $D(\varepsilon_t) = \sigma^2 > 0$ и что для каждого t случайные величины I_t и ε_t независимы. Тогда из второго уравнения приведенной формы находим:

$$Cov(Y_t, \varepsilon_t) = \frac{1}{1-\beta} Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) = \frac{\sigma^2}{1-\beta} \neq 0,$$

так что в исходном уравнении для C_t объясняющая переменная Y_t коррелирована с ошибкой. При этом для оценки $\hat{\beta}$ коэффициента β, получаемой по n наблюдениям применением метода наименьших квадратов к исходному уравнению, имеем:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta} = \beta + \frac{Cov(Y_t, \varepsilon_t)}{D(Y_t)},$$

где

$$D(Y_t) = \frac{1}{(1-\beta)^2}\left(D(I_t) + \sigma^2\right)$$

и

$$\underset{n\to\infty}{p\lim}\,\hat{\beta} = \beta + (1-\beta)\frac{\sigma^2}{D(I_t) + \sigma^2}.$$

Поскольку $\sigma^2 > 0$ и в модели Кейнса $0 < \beta < 1$, то $\hat{\beta}$ переоценивает значение нормы потребления.

Имея в виду это осложнение, в разд. 6 ч. 1 рассматривалось опосредованное получение оценкок коэффициентов структурной формы через оценки коэффициентов уравнений приведенной формы. Применив метод наименьших квадратов к первому уравнению приведенной формы, найдем оценки коэффициентов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ и оценку дисперсии $\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}$. После этого можно найти оценки для параметров исходного уравнения, используя соотношения

$$\beta = \frac{\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}},\ \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{1+\tilde{\beta}},\ \sigma^2_{\varepsilon} = \frac{\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}}{\left(1+\tilde{\beta}\right)^2}.$$

Таким образом, структурная форма восстанавливается по первому уравнению приведенной формы. Второе уравнение оказывается в этом плане избыточным. Но, используя одно это уравнение, также можно восстановить структурную форму. Применив метод наименьших квадратов к этому уравнению, мы находим оценки коэффициентов $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\delta}$ и оценку дисперсии $\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}$. После этого можно найти оценки для параметров исходного уравнения, используя соотношения

$$\beta = \frac{\tilde{\delta}-1}{\tilde{\delta}},\ \alpha = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\delta}},\ \sigma^2_{\varepsilon} = \frac{\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\delta}^2}.$$

Возникает вопрос: совпадают ли результаты восстановления параметров структурной формы, полученные по двум различным уравнениям приведенной формы?

Из приведенных выражений для α, β и σ^2_{ε} получаем:

$$\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\delta}} = \frac{\tilde{\alpha}}{1+\tilde{\beta}},\ \frac{\tilde{\delta}-1}{\tilde{\delta}} = \frac{\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}},\ \frac{\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}}{\tilde{\delta}^2} = \frac{\sigma^2_{\tilde{\varepsilon}}}{\left(1+\tilde{\beta}\right)^2}.$$

Таким образом, зная истинные значения параметров уравнений приведенной формы, однозначно восстанавливаем по ним значения параметров структурной формы. Однако это если знаем истинные значения параметров уравнений приведенной формы, но они нам не известны, их приходится оценивать по имеющимся статистическим данным. При этом оценки параметров структурной формы, полученные с использованием оценок коэффициентов для разных уравнений приведенной формы, могут в общем случае отличаться друг от друга. Это связано с тем, что количество параметров приведенной формы больше минимально необходимого их числа для восстановления значений параметров структурной формы.

Между тем при рассмотрении примера 6.2.2 разд. 6 ч. 1 оценки параметров структурной формы, полученные с использованием оценок коэффициентов для разных уравнений приведенной формы, оказались одинаковыми. Почему это произошло?

Использование оценок коэффициентов первого уравнения приведенной формы приводит к следующим оценкам для α и β:

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{\hat{\beta}}}{1+\hat{\hat{\beta}}},\ \hat{\alpha} = \frac{\hat{\hat{\alpha}}}{1+\hat{\hat{\beta}}};$$

использование оценок коэффициентов второго уравнения приведенной формы приводит к оценкам:

$$\hat{\beta} = \left(\hat{\hat{\delta}} - 1\right) \Big/ \hat{\hat{\delta}},\ \hat{\alpha} = \frac{\hat{\hat{\gamma}}}{\hat{\hat{\delta}}}.$$

Полученные этими двумя способами оценки коэффициента β будут совпадать, если выполнено соотношение $\dfrac{\hat{\hat{\beta}}}{1+\hat{\hat{\beta}}} = \dfrac{\hat{\hat{\delta}}-1}{\hat{\hat{\delta}}}$, т. е. если $\hat{\hat{\delta}} = \hat{\hat{\beta}} + 1$. В то же время

$$C_t = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} I_t + \tilde{\varepsilon}_t \rightarrow \hat{\hat{\beta}} = \frac{Cov\left(C_t,\ I_t\right)}{Var\left(I_t\right)},$$

$$Y_t = \tilde{\gamma} + \tilde{\delta} I_t + \tilde{\varepsilon} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \hat{\hat{\delta}} = \frac{Cov\left(Y_t,\ I_t\right)}{Var\left(I_t\right)} = \frac{Cov\left(C_t + I_t,\ I_t\right)}{Var\left(I_t\right)} = \frac{Cov\left(C_t,\ I_t\right)}{Var\left(I_t\right)} + 1 = \hat{\hat{\beta}} + 1.$$

Таким образом, указанное соотношение выполняется, поэтому оценки коэффициента β, полученные с использованием оценок коэффициентов для разных уравнений приведенной формы, совпадают. Аналогичный

результат справедлив и для оценок коэффициента α, полученных с использованием оценок коэффициентов для разных уравнений приведенной формы.

Рассмотрим теперь простейшую модель рынка некоторого товара:

$$\begin{cases} Q^d = a_0 + a_1 P, \\ Q^s = b_0 + b_1 P, \\ Q^s = Q^d, \end{cases}$$

где Q^s — предложение товара (supply); Q^d — спрос на товар (demand); P — цена единицы товара; $a_1 < 0$, $b_1 > 0$.

Если правила определения объемов предложения и спроса известны, т. е. известны коэффициенты a_0, a_1, b_0 и b_1, то при отсутствии флуктуаций равновесное решение для цены P и спроса Q находится без труда. Здесь в наличии система двух линейных уравнений с двумя неизвестными P и Q:

$$\begin{cases} Q - a_1 P = a_0, \\ Q - b_1 P = b_0, \end{cases}$$

решением которой является пара значений

$$Q = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1}, \quad P = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1},$$

которые есть координаты точки пересечения прямых спроса и предложения (прямые d и s на рис. 1.2). При $a_0 > b_0$ оба эти значения положительны.

Предположим, что спрос подвержен случайным флуктуациям, изменяющим значение a_0 до значения $(a_0 + u_t)$ в t-м наблюдении, а предложение

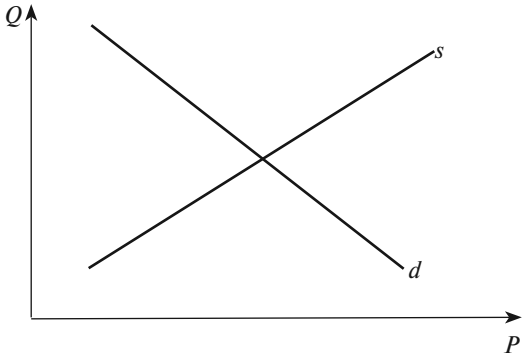


Рис. 1.2

подвержено флуктуациям, изменяющим в t-м наблюдении значение b_0 до значения $(b_0 + v_t)$, так что

$$\begin{cases} Q_t = a_0 + a_1 P_t + u_t, \\ Q_t = b_0 + b_1 P_t + v_t. \end{cases}$$

Тогда каждому t соответствуют свои равновесные значения цены P_t и спроса Q_t, являющиеся решениями системы

$$\begin{cases} Q_t - a_1 P_t = a_0 + u_t, \\ Q_t - b_1 P_t = b_0 + v_t. \end{cases}$$

Поскольку значения P_t и Q_t определяются внутри системы, о переменных P_t и Q_t говорят как об **эндогенных** (*endogenous*) переменных. Их значения в t-м наблюдении определяются коэффициентами a_0, a_1, b_0, b_1 и внешними случайными воздействиями (шоками) u_t, v_t.

Обращаясь к оцениванию уравнения $Q_t = \alpha + \beta P_t + \varepsilon_t$ по наблюдаемым значениям P_t и Q_t, $t = 1, \ldots, n$, статистик даже не знает, что он оценивает: прямую спроса или прямую предложения. Так, оценивание методом наименьших квадратов линейной модели зависимости потребления свинины на душу населения США от оптовых цен на свинину по годовым данным за период с 1948 по 1961 г. дает результаты, приведенные в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Оценивание зависимости потребления свинины на душу населения США от оптовых цен на нее по годовым данным с 1948 по 1961 г.

Переменная	Коэффициент	Стандартная ошибка	t-статистика	P-значение
1	77,484	13,921	5,66	0,0001
Цена	–24,775	29,794	–0,832	0,4219

Хотя формально отрицательное значение оценки коэффициента при цене говорит о том, что мы имеем дело с уравнением спроса, эта оценка оказывается статистически незначимой при любом разумном выборе уровня значимости, так что в доверительный интервал для данного коэффициента попадают как отрицательные, так и положительные значения.

Получив выражение для P_t из второго уравнения системы и подставив это выражение вместо P_t в первое уравнение, найдем:

$$Q_t = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} + \frac{b_1 u_t - a_1 v_t}{b_1 - a_1} = \pi_1 + w_{t1}.$$

Выражение для Q_t из первого уравнения системы подставим во второе уравнение, в результате получим:

$$P_t = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + \frac{u_t - v_t}{b_1 - a_1} = \pi_2 + w_{t2}.$$

Шоки u_t, v_t сдвигают точку равновесия. Сдвиг вдоль оси ординат:

$$\Delta Q = \frac{b_1 u_t - a_1 v_t}{b_1 - a_1};$$

сдвиг вдоль оси абсцисс:

$$\Delta P = \frac{u_t - v_t}{b_1 - a_1}.$$

Направление сдвига:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{b_1 u_t - a_1 v_t}{u_t - v_t}.$$

Если имеется только сдвиг спроса ($v_t = 0$), то

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{b_1 u_t}{u_t} = b_1 \text{ — сдвиг вдоль прямой предложения.}$$

Если имеется только сдвиг предложения ($u_t = 0$), то

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{a_1 v_t}{v_t} = a_1 \text{ — сдвиг вдоль прямой спроса.}$$

Пример 1.1.1

На рис. 1.3 показана реализация следующего процесса порождения данных:

DGP: $Q_t = 20 - 0{,}5P_t + u_t$, (спрос)
$Q_t = 10 + 0{,}5P_t + v_t$, (предложение)
$u_t, v_t \sim i.i.d.\ N(0, 1)$, $t = 1, 2, ..., 100$.

Рассеяние происходит вокруг точки $P = 10$, $Q = 15$; направления прямых спроса и предложения на диаграмме не выявляются. ■

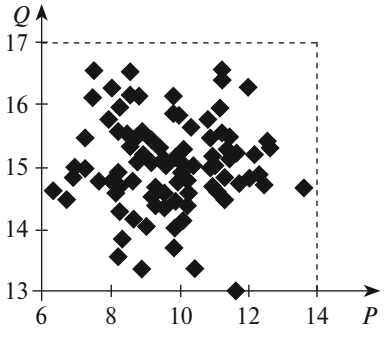


Рис. 1.3

Пара уравнений

$$\begin{cases} Q_t = \pi_1 + w_{t1}, \\ P_t = \pi_2 + w_{t2} \end{cases}$$

представляет приведенную форму системы. Заметим, что здесь существует корреляция между ошибками в разных уравнениях приведенной формы при одном и том же t, даже если ошибки в структурной системе не коррелированы: в последнем случае

$$Cov(w_{t1},\ w_{t2}) = Cov\left(\frac{b_1u_t - a_1v_t}{b_1 - a_1},\ \frac{u_t - v_t}{b_1 - a_1}\right) = \frac{1}{(b_1 - a_1)^2}\left(b_1D(u_t) + a_1D(v_t)\right).$$

Однако, поскольку в правых частях обоих уравнений приведенной формы находятся одни и те же объясняющие переменные (в данном случае, одна объясняющая переменная, тождественно равная единице), оценки коэффициентов приведенной формы, учитывающие наличие корреляции между ошибками в разных уравнениях (т. е. оценки, получаемые применением обобщенного метода наименьших квадратов — *GLS*), численно совпадают с оценками, получаемыми раздельным оцениванием обоих уравнений обычным методом наименьших квадратов — *OLS*[1]. Получив таким образом оценки $\hat{\pi}_1$, $\hat{\pi}_2$, мы тем самым получаем оценки для дробей $\frac{a_0b_1 - a_1b_0}{b_1 - a_1}$ и $\frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}$. Но этих двух оценок недостаточно для восстановления по ним значений 4 коэффициентов a_0, a_1, b_0, b_1 структурных уравнений, так что здесь имеет место **недоидентифицированность** (*underidentification*) или неидентифицируемость (*non-identification*) структурной формы системы.

Включим в правую часть уравнения спроса доход (например, совокупный располагаемый доход) Y_t, так что система примет вид:

$$\begin{cases} Q_t = a_0 + a_1P_t + a_2Y_t + u_t, \\ Q_t = b_0 + b_1P_t + v_t. \end{cases}$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, находим приведенную форму:

$$Q_t = \frac{a_0b_1 - a_1b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2b_1}{b_1 - a_1}Y_t + \frac{b_1u_t - a_1v_t}{b_1 - a_1} = \pi_{11} + \pi_{21}Y_t + w_{t1},$$

$$P_t = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2}{b_1 - a_1}Y_t + \frac{u_t - v_t}{b_1 - a_1} = \pi_{12} + \pi_{22}Y_t + w_{t2}.$$

В приведенной форме 4 коэффициента, тогда как в структурной форме 5 коэффициентов. Поэтому и здесь невозможно восстановить все коэффициенты структурной формы по коэффициентам приведенной формы. Однако кое-что сделать все же можно.

[1] Этот факт был установлен в работе (*Dwivedi, Srivastava*, 1978).

Прежде всего заметим, что

$$\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}} = b_1, \ \pi_{11} - b_1\pi_{12} = b_0,$$

так что коэффициенты уравнения предложения восстанавливаются по коэффициентам приведенной системы. В то же время для восстановления коэффициентов уравнения спроса остается только два выражения, так что восстановить однозначно их значения не представляется возможным. Таким образом, здесь уравнение предложения идентифицируемо, а уравнение спроса неидентифицируемо: система **частично идентифицируема** (*partially identified*).

Пример 1.1.2

На рис. 1.4 показана реализация следующего процесса порождения данных:

$$DGP: Q_t = 20 - 0{,}5P_t + 0{,}1Y_t + u_t, \text{ (спрос)}$$
$$Q_t = 10 + 0{,}5P_t + v_t, \text{ (предложение)}$$
$$u_t, v_t \sim i.i.d.\ N(0, 1),\ Y_t = 1000 + 100\eta_t,\ t = 1, 2, ..., 100,$$

где $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_{100}$ — случайная выборка из равномерного распределения в интервале (0, 1).

В этом случае на диаграмме выявляется направление прямой предложения. ■

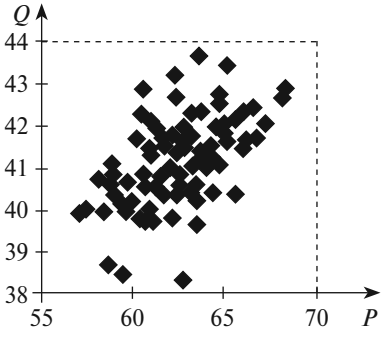


Рис. 1.4

Пополним теперь и уравнение предложения. Если рассматриваемый товар — продукт сельскохозяйственного производства, то в качестве объясняющей переменной в правую часть этого уравнения естественно включить какой-либо подходящий индекс климатических условий (например, среднее количество осадков в соответствующий период R_t). Тогда получим систему:

$$\begin{cases} Q_t = a_0 + a_1P_t + a_2Y_t + u_t, \\ Q_t = b_0 + b_1P_t + b_2R_t + v_t \end{cases}$$

с 6 коэффициентами. Найдем приведенную форму этой системы

$$\begin{cases} Q_t = \pi_{11} + \pi_{21}Y_t + \pi_{31}R_t + w_{t1}, \\ P_t = \pi_{12} + \pi_{22}Y_t + \pi_{32}R_t + w_{t2}, \end{cases}$$

применяя матричный подход, обычно используемый для анализа и оценивания систем одновременных уравнений. Заметим, что структурную форму системы можно записать в виде:

$$\begin{cases} Q_t - a_1 P_t = a_0 + a_2 Y_t + u_t \\ Q_t - b_1 P_t = b_0 + b_2 R_t + v_t, \end{cases}$$

или

$$\left(Q_t,\ P_t\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix} = \left(1,\ Y_t,\ R_t\right)\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \left(u_t,\ v_t\right),$$

а приведенную форму в виде

$$\left(Q_t,\ P_t\right) = \left(1,\ Y_t,\ R_t\right)\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} + \left(w_{t1},\ w_{t2}\right).$$

Приведенную форму системы получаем из структурной формы, умножая обе части предпоследнего уравнения на матрицу, обратную к матрице, стоящей в левой части:

$$\left(Q_t,\ P_t\right) = \left\{\left(1,\ Y_t,\ R_t\right)\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} + \left(u_t,\ v_t\right)\right\}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(1,\ Y_t,\ R_t\right)\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1} + \left(u_t,\ v_t\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(1,\ Y_t,\ R_t\right)\Pi + \left(u_t,\ v_t\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

где Π — матрица коэффициентов приведенной формы,

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Но

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1 - b_1}\begin{pmatrix} -b_1 & -1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix},$$

так что

$$Q_t = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2 b_1}{b_1 - a_1} Y_t - \frac{a_1 b_2}{b_1 - a_1} R_t + \frac{b_1 u_t - a_1 v_t}{b_1 - a_1},$$
$$P_t = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1} + \frac{a_2}{b_1 - a_1} Y_t - \frac{b_2}{b_1 - a_1} R_t + \frac{u_t - v_t}{b_1 - a_1}.$$

Поскольку матрица коэффициентов приведенной формы получается как

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

то

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Это дает нам 6 уравнений для восстановления 6 коэффициентов структурной формы по коэффициентам приведенной формы:

$$\pi_{11} - \pi_{12} a_1 = a_0, \ \pi_{11} - \pi_{12} b_1 = b_0,$$
$$\pi_{21} - \pi_{22} a_1 = a_2, \ \pi_{21} - \pi_{22} b_1 = 0,$$
$$\pi_{31} - \pi_{32} a_1 = 0, \quad \pi_{31} - \pi_{32} b_1 = b_2.$$

Из этих уравнений находим:

$$a_1 = \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}, \ b_1 = \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}},$$
$$a_2 = \pi_{21} - \pi_{22} \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}, \ b_2 = \pi_{31} - \pi_{32} \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}},$$
$$a_0 = \pi_{11} - \pi_{12} \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}, \ b_0 = \pi_{11} - \pi_{12} \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}.$$

Таким образом, здесь идентифицируемы и уравнение предложения, и уравнение спроса.

Рассмотрим теперь систему, в которой доход не включен в уравнение спроса, а уравнение предложения дополнено еще одной объясняющей переменной S_t (пусть это будет, скажем, индекс стоимости горюче-

смазочных материалов, используемых при производстве соответствующего продукта сельского хозяйства). Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} Q_t - a_1 P_t = a_0 + u_t, \\ Q_t - b_1 P_t = b_0 + b_2 R_t + b_3 S_t + v_t, \end{cases}$$

или

$$(Q_t,\ P_t)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix} = (1,\ R_t,\ S_t)\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} + (u_t,\ v_t).$$

Матрица коэффициентов приведенной формы

$$\begin{cases} Q_t = \pi_{11} + \pi_{21} R_t + \pi_{31} S_t + w_{t1}, \\ P_t = \pi_{12} + \pi_{22} R_t + \pi_{32} S_t + w_{t2} \end{cases}$$

получается как

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

так что

$$\begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь опять получаем 6 уравнений для восстановления 6 коэффициентов структурной формы:

$$\begin{aligned} &\pi_{11} - \pi_{12} a_1 = a_0,\ \pi_{11} - \pi_{12} b_1 = b_0, \\ &\pi_{21} - \pi_{22} a_1 = 0,\quad \pi_{21} - \pi_{22} b_1 = b_2, \\ &\pi_{31} - \pi_{32} a_1 = 0,\quad \pi_{31} - \pi_{32} b_1 = b_3. \end{aligned}$$

Однако ситуация с идентифицируемостью резко отличается от предыдущего случая.

Для коэффициентов первого структурного уравнения находим:

$$a_0 = \pi_{11} - \pi_{12} a_1,\ a_1 = \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}},\ a_1 = \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}},$$

так что для восстановления коэффициента a_1 имеем два соотношения.

Поскольку

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \\ \pi_{31} & \pi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{a_1 - b_1} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 & -1 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_1 - b_1} \begin{pmatrix} -a_0 b_1 + a_1 b_0 & -a_0 + b_0 \\ a_1 b_2 & b_2 \\ a_1 b_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

то $\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}} = \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}$, так что коэффициент a_1 восстанавливается однозначно, если известны точно коэффициенты приведенной формы. Если же производим свободное оценивание уравнений приведенной формы по имеющимся статистическим данным, не принимая во внимание ограничений на их коэффициенты, накладываемые структурной формой (в данном случае ограничения $\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}} - \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}} = 0$), то на основании оценок $\hat{\pi}_{21}$, $\hat{\pi}_{22}$, $\hat{\pi}_{31}$, $\hat{\pi}_{32}$ мы получим, как правило, различные значения отношений $\frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{22}}$ и $\frac{\hat{\pi}_{31}}{\hat{\pi}_{32}}$, так что получаются два варианта оценок для коэффициента a_1 и, соответственно, два варианта для коэффициента a_0. Таким образом, уравнение спроса оказывается **сверхидентифицируемым** (*overidentified*) — для восстановления его коэффициентов имеется количество соотношений, большее минимально необходимого.

Для коэффициентов второго структурного уравнения (уравнения предложения) также имеем три соотношения:

$$\pi_{11} - \pi_{12} b_1 = b_0,\ \pi_{21} - \pi_{22} b_1 = b_2,\ \pi_{31} - \pi_{32} b_1 = b_3.$$

Однако во втором структурном уравнении четыре неизвестных коэффициента b_0, b_1, b_2, b_3, и этих трех соотношений недостаточно для их восстановления — этим соотношениям удовлетворяет бесконечно много наборов значений b_0, b_1, b_2, b_3.

Таким образом, для рассмотренной модели:

- уравнение спроса сверхидентифицировано;
- уравнение предложения недоидентифицировано.

Последний пример показывает, что имеет смысл говорить не только об идентифицируемости или неидентифицируемости системы в целом, но и об идентифицируемости или неидентифицируемости отдельных уравнений системы.

Проверка выполнения условий идентифицируемости структурных уравнений

При рассмотрении условий идентифицируемости отдельных структурных уравнений, входящих в систему одновременных уравнений[2], прежде всего предполагается, что переменные, задействованные в системе, подразделяются на три типа:

- **эндогенные переменные** (*endogenous variables*);
- **экзогенные переменные** (*exogenous variables*);
- **предопределенные переменные** (*predetermined variables*).

Значения эндогенных переменных определяются внутри рассматриваемой системы; эндогенная переменная, входящая в i-е уравнение системы, коррелирована с ошибкой в этом уравнении. Значения экзогенных переменных определяются вне рассматриваемой системы; экзогенные переменные не коррелированы с ошибками во всех уравнениях системы для всех моментов времени. Понятие предопределенной переменной относится к системам, в которых наблюдения производятся в последовательные моменты времени. Значения предопределенных переменных, как и значения эндогенных переменных, определяются внутри системы. Однако значение в момент t предопределенной переменной, входящей в i-е уравнение, не должно быть коррелированным со значениями ошибки в этом уравнении, соответствующими моментам t, $t + 1$, ... Например, в системе

$$\begin{cases} Q_t = a_1 P_t + a_2 Q_{t-1} + u_t, \\ P_t = b_1 Q_{t-1} + v_t, \end{cases}$$

Q_t и P_t — эндогенные переменные; Q_{t-1} — предопределенная переменная.

Предполагается, что:

- система состоит из g уравнений, в каждое из которых входит хотя бы одна эндогенная переменная;
- в систему входят g эндогенных переменных;
- в систему входят K экзогенных и предопределенных переменных;
- каждое из g уравнений **нормировано** (*normalized*), так что коэффициент при одной из эндогенных переменных, входящих в уравнение, равен 1.

(В последнем примере $g = 2$, $K = 1$, уравнения нормированы.)

При выводе условий идентифицируемости можно не различать предопределенные и экзогенные переменные, и для краткости будем называть их в контексте проблемы идентифицируемости предопределенными.

[2] В смысле возможности восстановления коэффициентов структурных уравнений на основании коэффициентов уравнений приведенной формы.

Если собрать все эндогенные переменные в левых частях структурных уравнений, то систему одновременных уравнений можно записать в виде:

$$\begin{cases} \gamma_{11} y_{t1} + \ldots + \gamma_{g1} y_{tg} = \beta_{11} x_{t1} + \ldots + \beta_{K1} x_{tK} + u_{t1} \\ \qquad\qquad \ldots \\ \gamma_{1g} y_{t1} + \ldots + \gamma_{gg} y_{tg} = \beta_{1g} x_{t1} + \ldots + \beta_{Kg} x_{tK} + u_{tg}, \end{cases}$$

где $t = 1, \ldots, n$; $y_{t1}, \ldots, y_{tg}$ — эндогенные переменные; $x_{t1}, \ldots, x_{tK}$ — предопределенные переменные; $u_{t1}, \ldots, u_{tg}$ — случайные ошибки; γ_{ji} — в этой записи коэффициент при j-й эндогенной переменной в i-м уравнении; β_{ji} — коэффициент при j-й предопределенной переменной в i-м уравнении. (Разумеется, часть коэффициентов в конкретных системах равна нулю.) Заметим, что последнюю запись можно также представить как

$$\begin{cases} y_{t1}\gamma_{11} + \ldots + y_{tg}\gamma_{g1} = x_{t1}\beta_{11} + \ldots + x_{tK}\beta_{K1} + u_{t1} \\ \qquad\qquad \ldots \\ y_{t1}\gamma_{1g} + \ldots + y_{tg}\gamma_{gg} = x_{t1}\beta_{1g} + \ldots + x_{tK}\beta_{Kg} + u_{tg}, \end{cases}$$

и обозначим

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{g1} & \cdots & \gamma_{gg} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{K1} & \cdots & \beta_{Kg} \end{pmatrix},$$

$$y_t = \left(y_{t1}, \ \ldots, \ y_{tg}\right), \ x_t = \left(x_{t1}, \ \ldots, \ x_{tK}\right), \ u_t = \left(u_{t1}, \ \ldots, \ u_{tg}\right)$$

(последние три вектора здесь удобнее представлять как векторы-строки). Тогда система записывается в компактном виде:

$$y_t\Gamma = x_t B + u_t, \ t = 1, \ldots, n.$$

Предполагая невырожденность матрицы Γ, так что для этой матрицы существует обратная, умножим обе части последнего уравнения на Γ^{-1}. Получим приведенную форму системы:

$$y_t = x_t B\Gamma^{-1} + u_t\Gamma^{-1} = x_t\Pi + w_t.$$

Здесь

$$\Pi = \mathrm{B}\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{K1} & \cdots & \pi_{Kg} \end{pmatrix}, \ w_t = u_t\Gamma^{-1} = \left(w_{t1}, \ \ldots, \ w_{tg}\right),$$

где w_{ti} — случайная ошибка в i-м уравнении приведенной формы в момент t.

Выше мы уже фактически использовали это представление для получения приведенных форм систем

$$\begin{cases} Q_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + u_t, \\ Q_t = b_0 + b_1 P_t + b_2 R_t + v_t \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} Q_t - a_1 P_t = a_0 + u_t, \\ Q_t - b_1 P_t = b_0 + b_2 R_t + b_3 S_t + v_t. \end{cases}$$

Следует заметить, что даже если векторы $u_t = \left(u_{t1}, \ \ldots, \ u_{tg}\right)$, $t = 1, \ldots, n$, взаимно независимы и имеют одинаковое g-мерное нормальное распределение с нулевым средним и ковариационной матрицей $\Sigma = \sigma^2 I_g$, где I_g — единичная матрица, векторы $w_t = \left(w_{t1}, \ \ldots, \ w_{tg}\right)$ могут иметь коррелированные между собой и неодинаково распределенные компоненты. Однако это не препятствует получению оценок элементов матрицы П обычным методом наименьших квадратов: достаточно применить этот метод отдельно к каждому уравнению приведенной системы. Это связано с тем, что в правых частях всех уравнений приведенной формы присутствует один и тот же набор объясняющих переменных (см. ссылку на работу (*Dwivedi, Srivastava*, 1978)).

Поскольку

$$\Pi = B\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \ldots & \pi_{1g} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{K1} & \ldots & \pi_{Kg} \end{pmatrix},$$

то $\Pi\Gamma = B$, и мы использовали это соотношение для восстановления коэффициентов структурных уравнений двух последних систем. Вопрос об идентифицируемости структурной формы — это вопрос о возможности однозначного восстановления всех коэффициентов структурной формы, т. е. восстановления матриц Γ и B, на основании матрицы $\Pi = B\Gamma^{-1}$. Заметим, что в совокупности матрицы Γ и B состоят из $g^2 + Kg$ элементов, тогда как в матрице П всего Kg элементов. Это означает, что однозначное восстановление коэффициентов структурной формы по коэффициентам приведенной формы невозможно без использования дополнительной информации в виде невключения в отдельные уравнения тех или иных переменных, нормировки коэффициентов, линейных ограничений на параметры структуры[3].

[3] Как мы увидим ниже в этом разделе (см. Замечание 1.1.5), коэффициенты структурной формы могут не восстанавливаться однозначно по одним только коэффициентам приведенной

Если нас интересует i-е структурное уравнение, то его идентифицируемость — это возможность однозначного восстановления на основании коэффициентов приведенной формы:

Γ_i — i-го столбца матрицы Г, который содержит коэффициенты при эндогенных переменных, входящих в i-е структурное уравнение;

B_i — i-го столбца матрицы В, который содержит коэффициенты при предопределенных переменных, входящих в i-е структурное уравнение.

При этом, по-существу, достаточно иметь возможность восстановления Γ_i и B_i с точностью до умножения их на один и тот же числовой множитель: единственность достигается в этом случае указанием правила нормировки, в соответствии с которым коэффициент при определенной эндогенной переменной в i-м структурном уравнении полагается равным 1.

Пусть матрица А размера $(g + K) \times g$ составлена из матриц Г и В таким образом, что матрица Г располагается над матрицей В:

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma \\ B \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты при g эндогенных и K предопределенных переменных в i-м структурном уравнении составляют i-й столбец α_i матрицы А.

Существенным является то обстоятельство, что коэффициенты i-го структурного уравнения не могут быть восстановлены на основании коэффициентов приведенной формы, если в это уравнение входят все (g) эндогенные и все (K) предопределенные переменные системы.

Поэтому мы будем предполагать далее, что на элементы вектора α_i помимо нормировочного накладываются еще и некоторые дополнительные однородные линейные ограничения в виде уравнений

$$\Phi_i \alpha_i = 0,$$

где Φ_i — матрица размера $R_i \times (g + K)$; R_i — количество этих линейных ограничений.

Неспецифицированные коэффициенты i-го уравнения определяются по матрице $\Pi = B\Gamma^{-1}$ после применения правила нормировки однозначным образом тогда и только тогда, когда выполнено следующее **ранговое условие идентифицируемости** (*rank condition for identification*):

$$\operatorname{rank}(\Phi_i A) = g - 1$$

(матрица $\Phi_i A$ имеет R_i строк и g столбцов).

формы и в то же время однозначно восстанавливаться при привлечении дополнительной информации в виде ограничений на элементы ковариационной матрицы ошибок в правых частях уравнений структурной формы и использовании элементов ковариационной матрицы ошибок в правых частях уравнений приведенной формы.

Пусть A_i — матрица, получаемая из матрицы A вычеркиванием ее i-го столбца α_i, так что $A = [\alpha_i: A_i]$ Тогда

$$\operatorname{rank}(\Phi_i A) = \operatorname{rank}(\Phi_i [\alpha_i: A_i]) = \operatorname{rank}(\Phi_i \alpha_i: \Phi_i A_i),$$

и поскольку $\Phi_i \alpha_i = 0$, то

$$\operatorname{rank}(\Phi_i A) = \operatorname{rank}(0: \Phi_i A_i) = \operatorname{rank}(\Phi_i A_i).$$

Но матрица $\Phi_i A_i$ имеет размер $R_i \times (g - 1)$, и, чтобы ее ранг был равен $(g - 1)$, во всяком случае необходимо выполнение следующего **порядкового условия идентифицируемости** (*order condition for identification*) i-го структурного уравнения:

$$R_i \geq g - 1.$$

Предположим, что все линейные ограничения, накладываемые на элементы столбца α_i (помимо условия нормировки) являются **исключающими ограничениями** (*exclusion restrictions*), т. е. все они состоят в приравнивании определенных элементов столбца α_i нулю и исключении из i-го уравнения g_i^* эндогенных и K_i^* предопределенных переменных. Тогда общее количество исключенных переменных равно $g_i^* + K_i^*$ и необходимое условие идентифицируемости i-го структурного уравнения принимает вид:

$$g_i^* + K_i^* \geq g - 1,$$

или

$$K_i^* \geq (g - g_i^*) - 1.$$

Иначе говоря, количество предопределенных переменных в системе, не включенных в i-е структурное уравнение, должно быть не меньше количества эндогенных переменных, включенных в i-е уравнение, уменьшенного на единицу.

Если в левой части i-го структурного уравнения находится единственная эндогенная переменная, то $(g - g_i^*) - 1$ есть просто количество эндогенных переменных, включенных в правую часть этого уравнения. В этом случае порядковое условие идентифицируемости i-го структурного уравнения можно сформулировать следующим образом:

> Количество предопределенных переменных в системе, не включенных в i-е структурное уравнение, должно быть не меньше количества эндогенных переменных, включенных в правую часть этого уравнения.

Теперь можно охарактеризовать три ситуации, возникающие при оценивании i-го структурного уравнения:

1) $\operatorname{rank} \Phi_i \mathrm{A} < g - 1 \rightarrow i$-е уравнение **неидентифицируемо** (**недоопределено** — *underidentified*);
2) $\operatorname{rank} \Phi_i \mathrm{A} = g - 1$ и $R_i = g - 1 \rightarrow i$-е уравнение **идентифицируемо точно** (*just identified*);
3) $\operatorname{rank} \Phi_i \mathrm{A} = g - 1$ и $R_i > g - 1 \rightarrow i$-е уравнение **сверхидентифицируемо** (**переопределено** — *overidentified*).

В ситуации 1 просто не выполнено необходимое условие идентифицируемости. В ситуациях 2 и 3 коэффициенты i-го структурного уравнения однозначно восстанавливаются на основании коэффициентов приведенной системы. Однако эти две ситуации различаются существенным образом, если рассматривать задачу восстановления коэффициентов i-го структурного уравнения на основании оценок коэффициентов приведенной формы, полученных методом наименьших квадратов, примененным к каждому отдельному уравнению приведенной системы и не учитывающим ограничения на коэффициенты приведенной формы, накладываемые на них соотношением $\Pi = \mathrm{B}\Gamma^{-1}$. Если $\hat{\Pi}$ — оценка матрицы Π, полученная таким свободным оцениванием, то в ситуации 2 коэффициенты i-го структурного уравнения восстанавливаются по матрице $\hat{\Pi}$ однозначным образом, тогда как в ситуации 3 существует несколько вариантов такого восстановления, приводящих к различным результатам.

Заметим, что разным уравнениям системы могут соответствовать разные ситуации из трех перечисленных.

Проанализируем рассмотренные в этом разделе системы одновременных уравнений.

Первой была система

$$\begin{cases} Q_t = a_0 + a_1 P_t + u_t, \\ Q_t = b_0 + b_1 P_t + v_t. \end{cases}$$

Здесь список эндогенных переменных: (Q_t, P_t), а список предопределенных переменных ограничивается переменной, тождественно равной 1, так что полный список переменных в системе: (Q_t, P_t, 1). При этом $g = 2$, $K = 1$, матрицы Г, В и А имеют вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_0, & b_0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}.$$

На столбцы матрицы А не накладывается никаких ограничений кроме нормировочных, так что $g_1^* = g_2^* = 0$, $K_1^* = K_2^* = 0$, и ни для одного из двух

уравнений не выполнено порядковое условие $g_i^* + K_i^* \geq g - 1$. Следовательно система неидентифицируема.

Следующей была система:

$$\begin{cases} Q_t = a_0 + a_1 P_t + a_2 Y_t + u_t, \\ Q_t = b_0 + b_1 P_t + v_t, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} Q_t - a_1 P_t = a_0 + a_2 Y_t + u_t, \\ Q_t - b_1 P_t = b_0 + v_t. \end{cases}$$

Здесь список эндогенных переменных тот же: (Q_t, P_t). В список предопределенных переменных входят две переменные: (1, Y_t). Полный список переменных в системе: (Q_t, P_t, 1, Y_t). При этом $g = 2$, $K = 2$, матрицы Г, В и А имеют вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma \\ \mathrm{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a_1 & -b_1 \\ a_0 & b_0 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

На элементы первого столбца матрицы А накладывается только условие нормировки $\alpha_{11} = 1$. Поэтому первое уравнение системы неидентифицируемо. На элементы второго столбца помимо нормировочного накладывается одно исключающее ограничение $\alpha_{42} = 0$, так что для этого столбца $g_2^* = 0$, $K_2^* = 1$ и $g_2^* + K_2^* = g - 1 = 1$, т. е. порядковое условие идентифицируемости выполняется.

Заметим далее, что ограничение $\alpha_{42} = 0$ можно записать в виде $\Phi_2 \alpha_2 = 0$, где $\Phi_2 = (0\ 0\ 0\ 1)$. Тогда

$$\Phi_2 \mathrm{A}_2 = (0\ 0\ 0\ 1)(1,\ -a_1,\ a_0,\ a_2)^T = (a_2),$$
$$\operatorname{rank}(\Phi_2 \mathrm{A}) = \operatorname{rank}(\Phi_2 \mathrm{A}_2) = \operatorname{rank}(a_2) = 1,$$

так что $\operatorname{rank}(\Phi_2 \mathrm{A}) = g - 1$, и ранговое условие идентифицируемости выполнено. Наконец, поскольку $g_2^* + K_2^* = g - 1$, то второе уравнение идентифицируемо точно.