А. А. Заславский
Б. Р. Френкин
А. В. Шаповалов

Задачи о турнирах



Школьные
Математические
Кружки

УДК 51(07)
ББК 22.1
З36

Заславский А. А, Френкин Б. Р., Шаповалов А. В.
Задачи о турнирах
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2020
Школьные математические кружки; Вып. 10
112 с.
ISBN 978-5-4439-3390-0

Десятая книжка из серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам о спортивных турнирах и ориентирована в первую очередь на школьников 6–9 классов. В неё вошли разработки шести занятий математического кружка, а также более 50 дополнительных задач разной сложности. Первые три занятия рассчитаны на начинающих школьников, следующие три — на более подготовленных.

Брошюра адресована руководителям математических кружков и школьным учителям математики. Надеемся, что она будет интересна школьникам, их родителям, а также всем любителям математики, видящим её не только в учебниках, но и в спорте, а также в других проявлениях окружающей нас жизни.

Подготовлено на основе книги: *А. А Заславский*, *Б. Р. Френкин*, *А. В. Шаповалов*. Задачи о турнирах. — 3-е изд., доп. — М.: МЦНМО, 2019. — (Школьные математические кружки; Вып. 10). — ISBN 978-5-4439-1390-2.

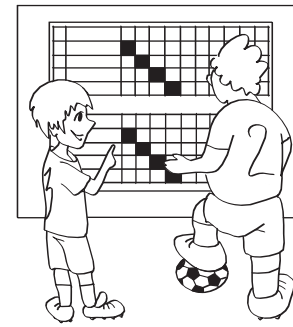
Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3390-0

© МЦНМО, 2020.

Занятие 1

Восстанови результаты



Знакомство с турнирами младшие школьники (5–7 класс) обычно начинают с задач, где дана частично заполненная турнирная таблица и надо восстановить недостающие данные. Сначала это кажется волшебством: почти из ничего получить всё. Особых знаний тут не требуется, достаточно умения логически мыслить. С точки зрения обучения, восстановление таблиц занимает ту же нишу, что и решение числовых ребусов. Но возня с таблицами и их возможными вариантами для любителя спорта вещь естественная, тогда как ребусы для многих — задачи искусственные. И хотя к ребусам легче привыкнуть, зато задачи про таблицы лучше развивают совершенно необходимый навык перевода с обычного языка на математический. Методы решения кажутся простыми, но они достаточно фундаментальны: перебор, принцип крайнего, принцип узких мест, оценка. На эти приёмы стоит обращать внимание при обсуждении решения задач — мягко, но регулярно.

Школьники 8 класса и старше могут начинать со второго занятия. В любом случае необходимо напомнить основные понятия, связанные с турнирами (см. предисловие).

Начнём со следующей несложной задачи.

Задача 1.1. Команда «Вымпел» во втором матче турнира забросила больше шайб, чем в первом, а в третьем матче — на 6 шайб меньше, чем в двух первых вместе взятых. Известно, что в этих трёх матчах «Вымпел» забросил 6 шайб. Мог ли «Вымпел» выиграть все 3 матча?

Ответ: не мог.

Решение. В первых двух матчах «Вымпел» забросил не больше шести шайб. Но и не меньше шести, так как в третьем матче «Вымпел» забросил на 6 шайб меньше. Значит, это число равно 6, и в третьем матче «Вымпел» забросил 0 шайб. Поэтому третий матч «Вымпел» не выиграл.

Путь к решению. *Узким местом* (где меньше всего неопределённость) оказалась сумма заброшенных шайб в двух первых матчах. Мы её «зажали с двух сторон» и однозначно определили. Важно и то, что число забитых шайб в третьем матче оказалось *крайним*, то есть наименьшим из возможных.

Задача 1.2. Аня, Боря, Валя и Гена сыграли однокруговой турнир в крестики-нолики и начали заносить результаты в турнирную таблицу (В — число выигрышей, Н — ничьих, П — поражений). Они успели заполнить только 4 клетки (см. рис.). Заполните все остальные клетки.

	Аня	Боря	Валя	Гена	**В**	**Н**	**П**
Аня						2	
Боря						1	
Валя					3		
Гена							1

Ответ: см. таблицу: выигрыш $+$, ничья $=$, проигрыш $-$.

	Аня	Боря	Валя	Гена	**В**	**Н**	**П**
Аня		$=$	$-$	$=$	0	2	1
Боря	$=$		$-$	$-$	0	1	2
Валя	$+$	$+$		$+$	3	0	0
Гена	$=$	$+$	$-$		1	1	1

Решение. Валя выиграла три игры, значит, выиграла у всех. Аня проиграла Вале, значит, две её ничьи — с Борей и Геной. Боря и Гена не сыграли вничью, иначе у Бори было бы две ничьи. Но Гена Боре и не проиграл, иначе у Гены было бы два поражения. Значит, Гена у Бори выиграл.

Путь к решению. Мы последовательно обращали внимание на *крайние* значения в таблице, которые давали нам максимум информации: 3 выигрыша Вали, затем 2 ничьих Ани. Чтобы определить результат последней игры Гена — Боря, мы устроили *перебор вариантов*, последовательно приводя невозможные варианты к *противоречию*.

Комментарий. Можно было воспользоваться и *арифметическими свойствами* таблицы Выигрышей-Ничьих-Поражений. Полезно обратить внимание на то, что: 1) сумма в каждой строке равна 3 (число игр одного участника); 2) сумма в столбце В равна сумме в столбце П (общее число выигрышей равно числу поражений); 3) сумма в столбце Н чётна, она равна удвоенному числу ничьих в турнире.

Задача 1.3. Ниже приведена таблица группового этапа одного из чемпионатов мира по футболу. Определите счёт во всех матчах.

	В	Н	П	М
Италия	1	2	0	1 : 0
Уругвай	1	1	1	2 : 1
Швеция	1	1	1	2 : 2
Израиль	0	2	1	1 : 3

Каждая команда сыграла с каждой один матч, В — число побед команды, Н — число ничьих, П — число поражений, М — количество забитых (слева) и пропущенных (справа) мячей.

Решение. Италия могла победить только со счётом 1 : 0, остальные матчи сыграла вничью 0 : 0. Израиль и Италия сыграли вничью со счётом 0 : 0 (иначе каждая из этих команд сделала обе свои ничьи с Уругваем и Швецией, и у Швеции две ничьи — противоречие). Вторая ничья Израиля 1 : 1 (если тоже 0 : 0, то Израиль проиграл со счётом 1 : 3, но никто не забил трёх голов). Значит, Израиль проиграл 0 : 2. Уругвай пропустил всего 1 гол, поэтому проиграл 0 : 1 и сделал ничью 0 : 0, значит, выиграл 2 : 0. Ни Италия, ни Уругвай не играли 1 : 1, поэтому ничью 1 : 1 Израиль сделал со Швецией. В остальных двух матчах Швеция забила всего 1 гол, значит, выиграла 1 : 0, поэтому и проиграла 0 : 1. Счёт 2 : 0 встретился всего один

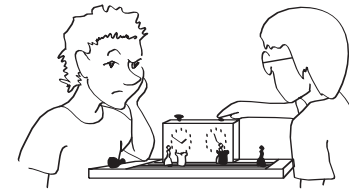
раз — в матче Уругвай–Израиль. Счёт 0 : 0, кроме матча Италия–Израиль, встретился ещё только в матче Италия–Уругвай. Значит, третий матч Италия выиграла у Швеции 1 : 0, и в матче Швеция–Уругвай счёт 1 : 0.

	Италия	Уругвай	Швеция	Израиль
Италия		0 : 0	1 : 0	0 : 0
Уругвай	0 : 0		0 : 1	2 : 0
Швеция	0 : 1	0 : 1		1 : 1
Израиль	0 : 0	0 : 2	1 : 1	

Путь к решению. *Узким местом* является малое число забитых и пропущенных голов, а также большое число ничьих. Важную роль здесь играет *двойственность* (частный случай *соответствия*): каждый забитый гол одновременно является и пропущенным, а каждый счёт в таблице *встречается дважды* — в прямом и в обратном порядке.

В следующих задачах надо считать набранные очки. Результат команды или игрока в турнире определяется по сумме очков, набранных в отдельных встречах. Решение и обсуждение следующей задачи поможет разобраться с подсчётом суммы очков турниров и их частей.

Задача 1.4. а) В однокруговом шахматном турнире с восемью участниками все партии закончились вничью. Сколько всего очков набрали участники? А сколько всего партий было сыграно?



б) В незаконченном шахматном турнире сыграно пока только 15 партий. Сколько всего очков успели набрать участники?

в) Закончился однокруговой шахматный турнир с 16 участниками. Чему равна сумма набранных очков?

Ответ: а) 28 очков и 28 партий; б) 15 очков; в) 240 очков.

Решение. а) Каждый участник набрал семь раз по $\frac{1}{2}$, то есть всего по 3,5 очка. Соответственно, 8 участников набрали $8 \cdot 3{,}5 = 28$ очков.

Число партий можно посчитать так: первый сыграл 7 партий, второй — 6 партий (не считая партии с первым), третий — 5 партий (не считая партий с первым и вторым), и т. д. Итого $7+6+5+4+3+2+1 = 28$. Совпадение с числом очков не случайно: действительно, ведь в каждой партии соперники получили по $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ очку. Отсюда ясно, *как считать число партий в любом однокруговом турнире*: *надо число участников умножить на число партий одного человека и поделить пополам.*

б) При ничьей игроки в сумме получают одно очко. Но ведь и при выигрыше тоже. Раз так, общее число очков равно числу сыгранных партий, то есть 15.

в) Мы уже заметили, что сумма очков не зависит от результатов партий. Поэтому можно считать сумму очков для случая, когда все ничьи: $16 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 120$.

Задача 1.5. В однокруговом турнире четырёх команд с начислением очков по системе 2–1–0 команда А набрала 5 очков, Б — 2 очка, В — 1 очко. Какое место заняла команда Г?

Ответ: второе место.

Решение. Всего команды набрали $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ очков, команда Г набрала $12 - 5 - 2 - 1 = 4$ очка и заняла второе место.

Обратите внимание, что здесь мы получили ответ, не восстанавливая результатов всех матчей. Более того, здесь нельзя восстановить достоверно результат *ни одного* матча!

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.6. Команда «Метеор» в третьем матче турнира забросила втрое больше шайб, чем в первом, а во втором и четвёртом матчах — в сумме на 8 шайб меньше, чем в первом и третьем вместе взятых. Известно, что в этих четырёх матчах «Метеор» забросил не более 11 шайб. Какое наибольшее число из этих матчей он мог выиграть?

Задача 1.7. В однокруговом турнире участвовали шахматисты А, Б, В, Г и Д. При равенстве очков место определялось по дополнительным показателям. Известно, что Б занял второе место и набрал больше очков, чем В, Г и Д вместе. Каков результат партии между А и Б?

Задача 1.8. В однокруговом футбольном турнире команд А, Б, В, Г команда А заняла первое место, а команда Б набрала 3 очка и заняла «чистое» второе место (то есть команда выше неё набрала больше очков, а каждая команда ниже неё — меньше очков). Восстановите результаты всех матчей.

Задача 1.9. В футбольном турнире пяти команд победитель набрал столько очков, сколько все остальные вместе взятые. Сколько ничьих было в этом турнире?

Задача 1.10. (Турнир Савина, 2018.) В однокруговом турнире участвовало пять команд. В итоге у всех команд оказалось разное число очков, а команда, занявшая пятое место, победила команду, занявшую первое, со счётом 3 : 1. У каких команд по этим данным можно однозначно определить число очков, если турнир: а) волейбольный; б) футбольный; в) гандбольный (система 2–1–0)?

Задача 1.11. В однокруговом шахматном турнире у каждого из игроков чего-то было столько, сколько у остальных вместе: у Оси — очков, у Нины — ничьих (в одной был пат), у Проши — проигрышей, а у Зины — зевков ферзя. Восстановите результаты всех партий.



Задача 1.12. В однокруговом шахматном турнире участвовали 8 человек и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Ответы и решения

1.6. Ответ: 2 матча.

Решение. В первом и третьем матче «Метеор» забросил в сумме не более 11 шайб. Но эта сумма в 4 раза больше числа шайб, заброшенных в первом матче, значит, она делится на 4. Поэтому сумма не больше 8. Но её можно уменьшить на 8, значит, она и не меньше 8. Итак, сумма равна 8. Но тогда во втором и четвёртом матчах «Метеор» забросил 0 шайб, значит, он эти матчи не выиграл. А первый и третий он мог выиграть, например, со счётом 2 : 0 и 6 : 0 соответственно.

Запомните приём: неравенство для целых чисел можно *усилить*, *используя делимость*.

1.7. Ответ: ничья.

Решение. Троица В, Г и Д сыграла внутри себя 3 партии, в каждой разыгрывалось одно очко, поэтому в сумме они набрали не менее трёх очков. Значит, у Б не менее 3,5 очков. Пять шахматистов сыграли между собой десять партий, поэтому в сумме набрали десять очков. Тогда А набрал не больше чем $10 - 3 - 3{,}5 = 3{,}5$ очка. Но и не меньше, так как у А очков не меньше, чем у Б. Значит, у А ровно 3,5 очка. Но тогда у Б не больше 3,5 очков, то есть и у Б ровно 3,5 очка. Поэтому у В, Г и Д вместе — 3 очка. Значит, все встречи с А и Б эта троица проиграла. Во встречах с ней А и Б набрали по 3 очка, значит, оставшиеся пол-очка они получили во встрече между собой, то есть сыграли вничью.

1.8. Ответ:

	А	Б	В	Г	Очки	Места
А		1	3	3	7	I
Б	1		1	1	3	II
В	0	1		1	2	III–IV
Г	0	1	1		2	III–IV

Решение. У команд В и Г не более чем по 2 очка, поэтому нет побед и между собой они сыграли вничью. Команда Б в обоих матчах против В и Г получала очки, значит, в каждом — меньше трёх очков, то есть оба матча сыграла вничью, заработав 2 очка. Тогда третье очко команда Б заработала ничьей с А. Команда В заработала 2 очка в матчах против Б и Г, значит, В проиграла А. Аналогично, команда Г проиграла А.

Путь к решению. *Узким местом* является малое число очков команд Б, В, Г, особенно в сравнении с числом очков за победу.

Комментарий. В приведённом решении удалось полностью избежать перебора вариантов за счёт правильного порядка при выборе *узких мест*. Однако большинство школьников будут предлагать решения с применением *перебора* (например, рассмотрев два варианта получения трёх очков командой Б). Это нормально, правильные решения нужно засчитывать. Однако всегда полезно показать, как *в конкретных случаях перебор можно сократить за счет того или иного наблюдения*.

1.9. Ответ: 6 ничьих.

Решение. Победитель сыграл 4 матча, в каждом набрал не более трёх очков (причем ровно 3 только в случае победы), значит, всего у него *не более* 12 очков. Остальные команды в каждом из шести матчей между собой набрали в сумме не менее двух очков (причем 2 только в случае ничьей), поэтому в сумме набрали *не менее* 12 очков. Указанное в условии равенство достигается только при 12 очках, то есть когда победитель всё выиграл, а все 6 остальных встреч были ничейными.

1.10. Ответ: а) Только у команды, занявшей третье место. б) У всех, кроме команды, занявшей третье место. в) У всех.

Решение. а) Из условия следует, что пятая команда набрала не меньше 3 очков, поэтому четвёртая команда набрала не меньше 4 очков, а третья — не меньше 5. Кроме того, первая команда набрала 0 очков в матче с пятой, поэтому в оставшихся трёх матчах могла набрать не

Оглавление

Предисловие 3

Занятие 1. Восстанови результаты 7

Занятие 2. Простейшие факты о турнирах 18

Занятие 3. Примеры и контрпримеры 27

Занятие 4. Алгебра турниров 41

Занятие 5. Турниры, графы и комбинаторика 48

Занятие 6. Проигравший вылетает 56

Дополнительные задачи 63

Ответы, указания, решения к дополнительным задачам 74

Раздаточный материал 102

Указатель задач по темам 110

Авторы задач 111