Ш.Х. Солтаханов

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Допущено УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям 010100 «Математика»,
010800 «Механика и математическое моделирование»

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 531
ББК 22.21 347
С 60

Солтаханов Ш.Х. **Основы механики голономных и неголономных систем.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 184 с. — ISBN 978-5-9221-1455-4.

Учебное пособие «Основы механики голономных и неголономных систем» дополняет курс теоретической механики, читаемый автором в течение ряда лет на факультете математики и компьютерных технологий Чеченского государственного университета. Теоретический материал проиллюстрирован достаточным количеством примеров и задач.

Пособие рассчитано на студентов и аспирантов университетов, а также на специалистов в области аналитической механики.

Допущено Учебно-методическим объединением по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 010100 «Математика», 010800 «Механика и математическое моделирование».

Рецензенты:

докт. физ.-мат. наук, проф. *А. В. Карапетян* (МГУ им. М. В. Ломоносова),
кафедра теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета
(зав. кафедрой докт. физ.-мат. наук, проф. *П. Е. Товстик*).

ISBN 978-5-9221-1455-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В данном учебном пособии с позиций профессоров Санкт-Петербургского государственного университета Н. Н. Поляхова, С. А. Зегжды и М. П. Юшкова рассматриваются механические системы с голономными связями и с неголономными связями до второго порядка включительно. Пособие состоит из четырех глав; в начале пособия, во введении, дается краткий очерк развития теории неголономных систем. Глава IV является связующей между теорией неголономных систем и теорией управления.

В конце пособия приводится обширный список дополнительно рекомендуемой литературы.

Основным аппаратом при исследовании голономных и неголономных систем являются: понятие изображающей точки по Герцу и понятие касательного пространства к многообразию всех возможных положений механической системы в данный момент времени.

В главе I вводится понятие точки, изображающей движение механической системы. Используется подход к выводу уравнений Лагранжа первого и второго рода, показывающий их единство и общность. Этот подход позволяет записать уравнения Лагранжа в форме, которая может быть использована как в случае одной материальной точки, так и в случае системы материальных точек. С различных точек зрения обсуждается понятие идеальности голономных связей. Анализируется взаимосвязь полученных уравнений движения и принципа Даламбера–Лагранжа.

Глава II посвящена изложению общих вопросов неголономной механики. Здесь большое внимание уделяется обобщенному оператору Гамильтона, введенному Н. Н. Поляховым для векторного представления реакции нелинейных неголономных связей. Несвободное движение системы материальных точек записывается как одно векторное уравнение, имеющее привычный вид векторной записи второго закона Ньютона. Для описания движения голономных систем из этого векторного уравнения получены уравнения Лагранжа первого и второго рода, а для неголономных систем — уравнения Маджи и уравнения Лагранжа второго рода с множителями.

Из уравнений Маджи получены практически все известные формы уравнений движения неголономных систем (уравнения Чаплыгина, Гамеля–Новосёлова, Воронца–Гамеля, Пуанкаре–Четаева–Румянцева). Исследуется взаимосвязь принципа Суслова–Журдена с уравнениями Маджи и уравнениями Лагранжа первого рода в криволинейных координатах неголономных систем. Изложена теория линейного преобразования сил и сам принцип Суслова–Журдена.

В главе III излагаются общие вопросы неголономной механики для механических систем произвольной структуры. При изложении используется понятие касательного пространства к многообразию всех положений системы, которые она могла бы иметь в данный момент времени. С помощью такого подхода вводятся понятия основного и взаимного базисов, а систему уравнений Лагранжа второго рода, описывающих движение свободной механической системы, записывают в виде одного векторного уравнения, имеющего вид второго закона Ньютона. При этом вводится понятие вектора ускорения в касательном пространстве, характеризующего движение механической системы любого вида с конечным числом степеней свободы. Далее рассматривается несвободное движение механической системы при наложении голономных и неголономных связей до второго порядка включительно, линейных относительно вторых производных от обобщенных координат. В этом случае все касательное пространство разбивается уравнениями идеальных связей на два ортогональных подпространства, в одном из которых составляющая ускорения системы полностью определяется уравнениями связей, а в другом при наложении идеальных связей векторное уравнение движения имеет вид, соответствующий отсутствию связей.

Формирование реакции идеальных связей в первом пространстве описывается с помощью обобщенных операторов Гамильтона. Получены выражения множителей Лагранжа в виде функций времени и обобщенных координат и скоростей. В этой главе излагаются дифференциальные вариационные принципы механики (Даламбера–Лагранжа, Суслова–Журдена, Гаусса) и показываются их единство и взаимосвязь, а также выводятся обобщенные уравнения Маджи, справедливые для линейных неголономных связей второго порядка, полученные ранее А. Пшеборским и Г. Гамелем с помощью обобщенного принципа Даламбера–Лагранжа и Гаусса соответственно. Изложена теория линейного преобразования сил и сам принцип Гаусса.

Глава IV является связующим звеном между теорией неголономных систем и теорией управления. Здесь показывается, что уже классическая теория движения неголономных систем может быть применена к исследованию ряда вопросов теории управления.

В начале главы решены две задачи об управляемом движении А. Бегена на основе теории управления движением с помощью связей, зависящих от параметров. При использовании подхода В. И. Киргетова применения теории движения неголономных систем к некоторым задачам динамики полета решены задачи наведения летательного аппарата на преследуемый объект (цель) по методу погони как в плоском, так и в пространственном случаях. Приводятся наиболее известные способы решения. Исследуется знаменитый пример Аппеля–Гамеля и показывается, что возникающая в нем нелинейная неголономная связь может быть осуществлена лишь специальной системой управления. Последний параграф главы посвящен некоторым замечаниям о неголономных связях.

В качестве основной литературы рекомендуются книги, представленные ниже.

1. *Поляхов Н.Н.*, *Зегжда С.А.*, *Юшков М.П.* Теоретическая механика. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985. 536 с.; — М.: Высшая школа. 2000. — 592 с.
2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. — М.: Наука. 1999. — 415 с.
3. *Неймарк Ю.И.*, *Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. — М.: Наука. 1967. — 520 с.
4. *Зегжда С.А.*, *Солтаханов Ш.Х.*, *Юшков М.П.* Неголономная механика. Теория и приложения. — М.: Наука. 2009. — 344 с.
5. *Болотин С.В.*, *Карапетян А.В.*, *Кугушев Е.И.*, *Трещев Д.В.* Теоретическая механика. — М.: 2010. — 432 с.

Помимо названных книг с успехом можно использовать публикации и монографии, которые приводятся в конце пособия в списке дополнительно рекомендуемой литературы.

Автор благодарен докторам физ.-мат. наук, профессорам С. А. Зегжде, М. П. Юшкову и А. В. Карапетяну за ценные советы, которые позволили значительно улучшить содержание книги, и особенно благодарен зав. кафедрой теоретической и прикладной механики СПбГУ, доктору физ.-мат. наук, профессору П. Е. Товстику за постоянное внимание и поддержку научной деятельности.

Автор будет весьма признателен всем, кто пришлет свои замечания по данной книге (e-mail: Soltakhanov@yandex.ru).

г. Грозный, 2012 год

Введение

Как известно, неголономная механика возникла из необходимости решать задачи о перекатывании твердых тел без проскальзывания. Следует отметить, что еще до возникновения неголономной механики классики механики (И. Ньютон, Л. Эйлер, И. Бернулли, Я. Бернулли, Ж. Даламбер, Ж. Лагранж, С. Пуассон и др.) решали подобные задачи с помощью основных теорем механики. Однако в конце XIX века попытки исследовать типично неголономные задачи привычными методами голономной механики (К. Нейман, Э. Кричини, Г. Схоутен, Л. Больцман и др.) привели к ряду знаменитых ошибок, привлекших пристальное внимание ведущих ученых того времени и сыгравших решающую роль в становлении неголономной механики. Наиболее известна в этом отношении работа Э. Линделефа, предлагавшего для изучения перекатывания тела, ограниченного поверхностью вращения, под действием консервативных сил, зависящих от координат точки касания тела, вместо общих теорем динамики, используемых в монографии С. Пуассона, исходить из принципа Гамильтона или из уравнений Лагранжа второго рода, которые можно из него получить. Допущенную Э. Линделефом существенную ошибку первым, уже в год опубликования его работы, заметил С. А. Чаплыгин. Через два года он нашел правильное решение задачи Линделефа.

Как самостоятельный раздел механики Ньютона неголономная механика оформилась в работе Г. Герца «Принципы механики, изложенные в новой связи». Именно ему принадлежат термины голономные и неголономные системы.

Исследованиями ученых было выяснено, что идеальные голономные и неголономные связи имеют принципиально различные векторы реакций связей, поэтому вместо уравнений Лагранжа второго рода при изучении движения неголономных систем следует пользоваться уравнениями Лагранжа с множителями. Одними из первых правильные уравнения движения при наложении неголономных связей предложили М. Ферререс и Е. Раус. М. Ферререс рассматривал случай, когда неголономные связи представлены в виде выражений производных от декартовых координат как линейные функции от обобщенных скоростей, а уравнения Е. Рауса содержали множители Лагранжа, причем для линейных связей он ввел форму, которая в настоящее время в литературе обычно называется уравнениями Лагранжа второго рода с множителями.

Первые уравнения без множителей Лагранжа в неголономной механике ввел С. А. Чаплыгин. Эти уравнения были получены при некоторых ограничениях, но выполнявшихся для большинства реальных механических задач, изучавшихся в то время. Такие системы стали называться системами Чаплыгина. Фактически одновременно с С. А. Чаплыгиным общие уравнения для систем с любыми идеальными линейными неголономными связями получил и Г. Ма́джи. Уравнения Маджи являлись линейными комбинациями уравнений Лагранжа второго рода. К сожалению, эти уравнения долгое время не были замечены современниками. А. Пшеборский распространил уравнения Маджи на нелинейные неголономные связи.

Работа С. А. Чаплыгина привлекла большое внимание многих выдающихся ученых своего времени. Были предложены различные формы уравнений движения неголономных систем без множителей Лагранжа — уравнения В. Вольтерра, Л. Больцмана, П. В. Воронца, Г. Гамеля и др. Установленные ими различные виды уравнений движения неголономных систем составлены в квазикоординатах и имеют общую структуру уравнений Лагранжа второго рода с корректирующими аддитивными членами неголономности. Предлагались и иные формы уравнений движения, например: уравнения П. Аппеля, Ж. Куанжеля, И. Ценова, И. Схоутена, Н. Н. Поляхова.

Новое направление в получении уравнений движения дал А. Пуанкаре. Его идея представлять уравнения движения голономных механических систем с помощью некоторой транзитивной группы Ли бесконечно малых преобразований была развита Четаевым на случай нестационарных связей и зависимых переменных, когда группа преобразований интранзитивна. Четаев преобразовал уравнения Пуанкаре к виду канонических уравнений и разработал теорию интегрирования этих уравнений. Теория Пуанкаре–Четаева работами Л. М. Мархашова, В. В. Румянцева, Фама Гуена была распространена и на неголономные линейные системы. В. В. Румянцев расширил уравнения Пуанкаре–Четаева на случай нелинейных неголономных связей.

Многие исследователи для вывода уравнений движения неголономных систем использовали принцип Даламбера–Лагранжа, справедливый для голономных систем, доопределив понятие возможных перемещений при наложении неголономных связей.

Дж. У. Гиббс и П. Аппель для этого случая вводили возможные перемещения по правилам, фактически отождествлявшим их с возможными скоростями, что является вполне естественным. Но именно с понятием возможных скоростей связал соответствующий принцип неголономной механики Ф. Журден. Практически этот же принцип, но с несколько видоизмененной терминологией сформулировал и Г. К. Суслов. Параллельно с получением уравнений движения (и для вывода уравнений движения) изучался вопрос о дифференциальных вариационных принципах неголономной механики. Применение в неголономной механике одновременно принципов и Даламбера–Лагранжа, и Журдена, и Гаусса ставило вопрос о взаимосвязи дифференциальных вариационных принципов механики. Уже в начале XX века этому вопросу уделялось внимание (например, статья Р. Лейтингера), однако всестороннее изучение этой проблемы было начато работой Н. Г. Четаева и завершено исследованиями В. В. Румянцева.

Н. Г. Четаев вводит важнейшее понятие для неголономной механики — возможные перемещения системы при наличии нелинейных неголономных связей (связи типа Четаева). Аналогичную аксиому идеальности неголономных связей вводил и А. Пшеборский при распространении уравнений Маджи на случай нелинейных неголономных связей. Отдавая должное соответствующим рассуждениям П. Аппеля, В. С. Новосёлов такие условия называет условиями Аппеля–Четаева и для соответствующих возможных перемещений вводит термин «A-перемещений». Дж. Папаставридис называет данные условия определением Маурера–Аппеля–Четаева–Гамеля возможных перемещений при наличии нелинейных неголономных связей. Эти условия являются основным аппаратом исследований в неголономной механике.

И в настоящее время большое внимание уделяется созданию новых форм уравнений движения неголономных систем и расширению имеющихся видов уравнений на более широкий класс связей (см., например, статьи А. И. Ван-дер-Шафта и Б. М. Машке, Дж. Папаставридиса). Здесь можно обратить внимание на новую форму уравнений неголономной (и голономной) механики, предлагаемую Я. В. Татариновым, охватывающую известные записи уравнений движения, причем большинство слагаемых находится с помощью формальной скобки Пуассона. В работе Ф. Удвадиа и Р. Калабы при определении реакций связей, представленных в виде линейных неголономных связей второго порядка, используется матричное исчисление. Разбиение уравнениями связей всего пространства на два ортогональных подпространства автоматически осуществляется за счет использования обобщенной инверсии Мура (Мора) и Пенроуза.

Много внимания уделяется созданию компьютерно-ориентированных методов, опирающихся на использование матричных форм записи уравнений движения. Среди этих работ, в первую очередь, можно выделить статьи В. В. Величенко, М. Борри, К. Ботассо, П. Мантегацца, Ю. Г. Мартыненко. Большое внимание в неголономной механике уделялось вопросам реализации неголономных связей (исследования А. В. Карапетяна, К. Каратеодори, В. В. Козлова, И. В. Новожилова, В. В. Калинина, Н. А. Фуфаева и др.). Особенно большой интерес вызывал пример Аппеля–Гамеля, рассматриваемый с точки зрения возможности создания механическим путем нелинейной неголономной связи. Некорректность предельного перехода, проведенного П. Аппелем и Г. Гамелем, пояснена Ю. И. Неймарком и Н. А. Фуфаевым. Новый подход по учету взаимодействия тела с поверхностью дают работы В. Ф. Журавлева. Наряду с изучением движения неголономных систем с переменными массами, с неудерживающими связями, с неидеальными связями много внимания уделялось и уделяется исследованию устойчивости и стабилизации движений неголономных систем (например, работы В. И. Каленовой, В. М. Морозова, М. А. Салминой, А. В. Карапетяна, В. В. Козлова, А. С. Кулешова, А. П. Маркеева, Ю. И. Неймарка и Н. А. Фуфаева, М. Паскаль, В. В. Румянцева, Лилона Кая, А. Нордмарка и Х. Эссена, Жу Хайпина и Мэя Фунсяна, П. Хагедорна и др).

При изучении движения тел без проскальзывания по неподвижным поверхностям авторы уделяли много внимания интегрированию системы дифференциальных уравнений. Но особенно большое количество работ, посвященных математическим вопросам интегрируемости уравнений движения неголономных систем, появилось с конца 70-х годов XX-го столетия. Здесь можно упомянуть работы А. А. Афонина, А. В. Борисова, А. А. Бурова, А. П. Веселова, Л. Е. Веселовой, А. В. Карапетяна, А. А. Килина, В. В. Козлова, С.Н.Колесникова, А. С. Кулешова, И. С. Мамаева, А. П. Маркеева, Н. К. Мощука, Ю. Н. Федорова, В. А. Ярощук и др. Среди этих исследований, в свою очередь, выделяются работы В. В. Козлова и А. П. Маркеева. Применение в начале XX столетия тензорных методов в механике неголономных систем привело к появлению новой области геометрии — неголономной геометрии. На развитие этого направления были направлены работы В. В. Вагнера, Г. Врачнеану, А. Вундхейлера, З. Горака, А. М. Лопшица, П. К. Рашевского, Дж. Синджа, И.Схоутена, В. Чжоу. Математические аспекты неголономной механики исследовались в работах В.И.Арнольда, А. М. Вершика, А. П. Веселова, Л. Е. Веселовой, В. Я. Гершковича, В. В. Козлова, М. Леона, Л. М. Мархашова, А. И. Нейштадта, Н. Н. Петрова, П. Р. Родригеса, Д. М. Синцова, С. Смейла, Л. Д. Фаддеева, Д. П. Шевалье и др. Особое значение для их понимания имеют монографии В. И. Арнольда, А. Д. Брюно, Б. А. Дубровина, С. П. Новикова, А. Т. Фоменко, К. Трусделла.

Теория движения неголономных систем успешно применялась и применяется при решении различных технических задач: в теории движения велосипеда и мотоцикла (М. Бурле, М. Буссинеск, Е. Д. Дикарев, С. Б. Дикарева, Е. Карвалло, А. М. Летов, И. И. Метелицын, В. К. Пойда, Н. А. Фуфаев), в различных машинах с вариаторами скорости (И. И. Артоболевский, И. И. Вульфсон, Я. Л. Геронимус, В. А. Зиновьев, А. И. Кухтенко, А. В. Мальцев, В. С. Новоселов, Б. А. Пронин, И. И. Тартаковский), в теории движения электромеханических систем (А. В. Гапонов, В. А. Диевский, О. Енге, Г. Килау, А. Ю. Львович, П. Майсер, Ю. Г. Мартыненко, Ф. Ф. Родюков, И. Штайгенбергер) и в целом ряде других областей техники (например, обкатка ротора по жесткому подшипнику). В последние годы проводились исследования, посвященные движению спортсмена на скейтборде и снейкборде (Ю. Г. Исполов, Б. А. Смольников, А. С. Кулешов). Особенно успешно эта теория применяется для создания теории движения автомобиля (А. Б. Бячков, Н. Е. Жуковский, П. С. Линейкин, Л. Г. Лобас, А. А. Нездеров, Ю. И. Неймарк, И. В. Новожилов, В. К. Пойда, Н. А. Фуфаев, Е. А. Чудаков, Ю. С. Шевердин, М. П. Юшков) и теории взаимодействия колеса и дороги (В. Г. Вильке, В. Гоздек, М. И. Есипов, В. Ф. Журавлев, А. Ю. Ишлинский, А. В. Карапетян, М. В. Келдыш, И. В. Новожилов, П. Рокар, Н. А. Фуфаев). В свою очередь, сложное неголономное взаимодействие шины с дорогой М. А. Левин и Н. А. Фуфаев описали феноменологической моделью качения деформируемого колеса. Эта модель позволяет определять силу и момент, действующие при движении автомобиля на колесо со стороны дороги. При таком подходе движение системы описывается обычными уравнениями Лагранжа второго рода. Именно таким путем составляли Е. В. Абрарова, А. А. Буров, С. Я. Степанов, Д. П. Шевалье уравнения движения для исследования устойчивости стационарных движений сложной автомобильной системы, состоящей из тягача-полуприцепа со сцепкой.

Теория неголономных систем применяется и при решении ряда задач робототехники. В частности, здесь в настоящее время активно изучаются вопросы динамики и управления мобильными колесными роботами (см., напр., работы А. И. Кобрина, Ю. Г. Мартыненко, А. В. Ленского, Д. Е. Охоцимского).

Одним из направлений, развиваемых в неголономной механике, является изучение движений при наличии связей высокого порядка. Отдельным вопросам движений при связях высокого порядка были посвящены работы Бл. Долапчиева, Д. Манжерона, С. Делеану, Г. Гамеля, Я. Нильсена, Л. Нордхайма, И. Ценова, Н. Н. Поляхова. Эту теорию продолжали и продолжают активно развивать, например, исследования Ю. А. Гартунга, В. В. Добронравова, До Шаня, Ю. Г. Исполова, В. И. Киргетова, Б. Г. Кузнецова, М. А. Мацуры, Мэя Фунсяна, Б. Н. Фрадлина, Л. Д. Рощупкина, М. А. Чуева, И. М. Шульгиной, К. Янковского, Ф. Китцки, Р. Хастена, С. А. Зегжды, М. П. Юшкова и др.

Как указывалось выше, неголономная механика возникла, прежде всего, из необходимости решать различные задачи о перекатывании тел без проскальзывания. Однако уже в такой постановке можно было ставить некоторые задачи управления, например изучать управление движением при помощи связей, зависящих от параметров. Пределы применения теории движения неголономных систем значительно расширились при рассмотрении сервосвязей, введенных в изучение А. Бегеном и П. Аппелем. Сам А. Беген сервосвязи применял для исследования движения гирокомпасов Аншютца и Сперри. Теорию сервосвязей активно развивал В. И. Киргетов. Он применил методы аналитической механики для изучения преследования цели. Еще более востребованным аппарат неголономной механики оказался в связи с решением ряда более широких задач управления (см., например, работы С. Деневой, В. Диамандиева, В. В. Добронравова, Ю. Г. Исполова, Б. А. Смольникова, К. Янковского, Е. Яржебовской, Л. Штейгенбергера, Мэя Фунсяна, В. Блайера, И. Парчевского). В этом случае роль неголономных связей играет программа движения, а реакция таких связей опять рассматривается как управляющая сила. Такие неголономные связи правильнее называть программными связями. Теории движения систем с программными связями и исследованию устойчивости вычислительного процесса при учете приближенного выполнения уравнений связей посвящены работы А. С. Галиуллина, И. А. Мухаметзянова, Р. Г. Мухарлямова, В. Д. Фурасова.

Глава I

ГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Связи и их классификация. Принципиальное отличие неголономных связей от голономных

Рассмотрим ограничения (условия), налагаемые на точки механической системы. Механической системой, как известно, называют совокупность материальных точек, определенным образом связанных и взаимодействующих между собой. Если каждая точка системы при заданной системе сил может занять любое положение в пространстве и иметь любую скорость, то такую систему называют *свободной*. Если вследствие каких-либо ограничений (условий) точки, составляющую систему, не могут занять произвольного положения в пространстве и иметь произвольные скорости, то такая система называется *несвободной*. Ограничения (условия), которые не позволяют точкам системы занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости, называются *связями*.

Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени различных порядков. Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме

$$f_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = 0$$

или краткой записью

$$f_2(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0\,, \qquad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Здесь индекс «2» означает порядок старшей производной от координат, входящих в аргументы функции.

Для механической системы, состоящей из N точек, k уравнений связей представляются системой уравнений

$$f_2^{\varkappa}(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0\,, \quad \varkappa = 1, \ldots, k,$$

где под x подразумевается совокупность всех проекций радиусов-векторов материальных точек на оси декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$:

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ \ldots, x_{N1}, x_{N2}, x_{N3}).$$

Связи называют *удерживающими*, если они выражаются математическими уравнениями, и *неудерживающими*, если они выражаются неравенствами.

Если в уравнения связей входят только координаты точек и не входят производные от координат, то связи называются *конечными* (*геометрическими*).

Уравнения конечных связей для системы имеют вид

$$f_0^{\varkappa}(t, x) = 0, \quad \varkappa = 1, \ldots, k. \tag{1.1}$$

Если в уравнения связей кроме координат входят еще и их производные по времени, то связи называются *дифференциальными* (*кинематическими*).

Очевидно, что из конечных связей дифференцированием можно получить кинематические,

$$f_1(t, x, \dot{x}) = \dot{f}_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \frac{\partial f_0}{\partial x_3}\dot{x}_3 = 0.$$

Из дифференциальных связей конечные получаются не всегда, так как дифференциальные уравнения не всегда могут быть проинтегрированы. Иногда дифференциальное уравнение связи можно представить как производную по времени от некоторой функции координат и, возможно, времени:

$$\frac{d}{dt} f_0(x, t) = 0.$$

После интегрирования такая дифференциальная связь становится конечной.

Действительно, рассмотрим связь вида

$$a_1\dot{x}_1 + a_2\dot{x}_2 + a_3\dot{x}_3 + a_0 = 0$$

или в дифференциальной форме

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_0 = 0,$$

где a_i — функции координат x_j.

Это выражение может или не может быть приведено к полному дифференциалу в зависимости от того, удовлетворяют или не удовлетворяют функции $a_i(x)$ некоторым условоиям. Например, если

$$a_0 = \frac{\partial f_0(x, t)}{\partial t}, \quad a_1 = \frac{\partial f_0(x, t)}{\partial x_1}, a_2 = \frac{\partial f_0(x, t)}{\partial x_2}, \quad a_3 = \frac{\partial f_0(x, t)}{\partial x_3},$$

то уравнение связи приобретает вид

$$\frac{\partial f_0(x,t)}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f_0(x,t)}{\partial x_j}\,dx_j = 0, \quad j = 1,2,3,$$

откуда имеем, что $f_0(x,t) = \mathrm{const}$, то есть связь интегрируема.

Связи вида (1.1) называются конечными, или *голономными*.

Неинтегрируемые дифференциальные связи, которые нельзя свести к конечным, называются *неголономными*.

При движении механической системы координаты точек и их производные по времени, входящие в уравнения связей, могут зависеть от времени. Кроме того, в уравнения связей время может входить явно, помимо координат и их производных. Связи, в уравнения которых время явно не входит, называются *стационарными* (*склерономными*). Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется *нестационарной* (*реономной*). Нестационарные связи обычно реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел. В простейшем случае одной точки нестационарная конечная связь в форме двужущейся или деформируемой поверхности имеет уравнение

$$f_0(t, x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Примерами систем с неголономными связями являются твердые тела, вынужденные катиться без проскальзывания по какой-либо шероховатой поверхности. Кинематический характер такой связи виден из того, что скорость точки касания тела с поверхностью должна равняться нулю. Если уравнения, выражающее это условие, не могут быть проинтегрированы, то связь будет неголономной.

Рассмотрим точку, которая движется по сфере переменного радиуса $R = f(t)$ с центром в начале координат. Если x_1, x_2, x_3 — координаты движущейся точки, то уравнение связи имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - f^2(t) = 0.$$

Здесь связь голономная.

Другой пример системы с голономной связью. Колесо радиуса R катится без проскальзывания по прямолинейному рельсу (рис. I.1).

Положение колеса в плоскости движения Ox_1x_2 определяется координатами x_{1c}, x_{2c} центра C колеса и углом поворота φ. Если ось x_1 направить вдоль рельса, то имеет место равенство $x_2 = R$. Эта связь конечная. Кроме того, должна быть равна

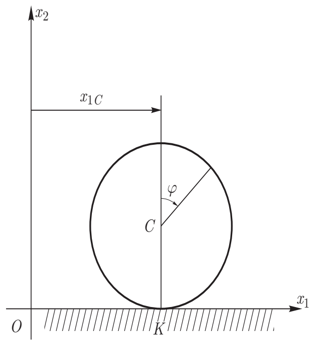

Рис. I.1

нулю скорость точки касания K колеса с рельсом. Это условие дает

$$\dot{x}_{1c} - R\dot{\varphi} = 0. \tag{1.2}$$

Следовательно, имеем дифференциальную связь. Однако уравнение (1.2) интегрируется и приводит к конечному соотношению между координатами x_{1c} и φ, имеющему вид

$$x_{1c} - R\varphi = \text{const}.$$

Таким образом, связь (1.2) является голономной.

Приведем теперь пример системы с неголономной связью. Рассмотрим движение саней вдоль наклонной плоскости (рис. I.2). Система является неголономной, если считать, что сани не могут перемещаться в направлении, перпендикулярном к полозьям.

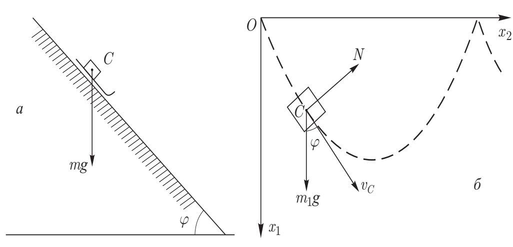

Рис. I.2