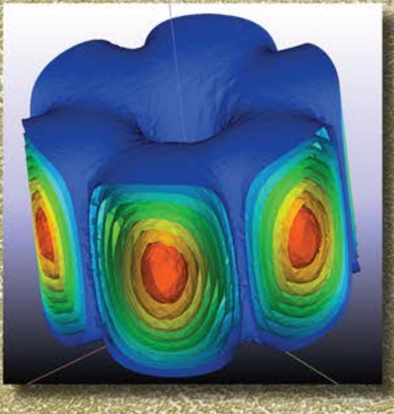
А.Д. Григорьев

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ



А. Д. Григорьев

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 621.372
ББК 32.8
Г 83

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12-02-07000

Григорьев А.Д. **Методы вычислительной электродинамики.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 432 с. — ISBN 978-5-9221-1450-9.

В книге рассматривается математическая постановка начальных и начально-краевых задач электродинамики, условия существования и единственности их решений. Изложены основные этапы и основные численные методы решения задач электродинамики: метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод конечного интегрирования, метод моментов, метод матрицы линий передачи. Рассмотрены методы аппроксимации уравнений и граничных условий, методы расчета электромагнитного поля в ближней и дальней зонах, алгоритмы вычисления параметров электродинамических систем и антенн. Приводятся примеры расчета.

Книга предназначена инженерам, научным работникам и аспирантам, работающим в области вычислительной электродинамики, микроволновой электроники и техники.

ISBN 978-5-9221-1450-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

По мере развития технических систем и устройств, ужесточения требований к их параметрам, надежности и стоимости, усложнения и удорожания натурных экспериментов, все большую роль играет математическое моделирование объектов. Использование достаточно точных математических моделей позволяет изучать поведение разрабатываемых изделий в самых различных, в том числе экстремальных условиях.

В частности, стремительное совершенствование микроволновых электродинамических систем, приборов и устройств, экспериментальное исследование электромагнитного поля которых является весьма сложной и дорогостоящей задачей, стимулировало развитие методов их математического моделирования. С начала 60-х годов прошлого века, как только это позволил уровень развития вычислительной техники, в мире начали интенсивно развиваться численные методы расчета высокочастотных электромагнитных полей, анализа и оптимизации микроволновых устройств. Существенный вклад в этот процесс внесли советские и российские ученые — А. А. Самарский, Л. А. Вайнштейн, А. Г. Свешников, В. В. Никольский, Г. Т. Марков, В. С. Михалевский и многие другие исследователи.

Развитие этого направления происходило одновременно с быстрым совершенствованием вычислительной математики и вычислительной техники, причем оба процесса оказывали положительное влияние друг на друга. В результате к концу 80-х годов оформилось новая отрасль знаний — *вычислительная электродинамика*. В рамках вычислительной электродинамики были созданы эффективные методы решения внутренних и внешних краевых и начально-краевых задач, разработаны эффективные алгоритмы решения систем алгебраических уравнений, вычисления электромагнитного поля и параметров электродинамических систем. На сегодняшний день в мире существует целый ряд коммерческих вычислительных программ моделирования высокочастотных электромагнитных полей, анализа и оптимизации параметров электродинамических систем. За рубежом за последние 15 лет издано не менее 20 книг по этой тематике, ежегодно публикуется большое количество статей, проводятся многочисленные международные симпозиумы и семинары.

К сожалению, в отечественной литературе вычислительная электродинамика представлена весьма слабо. За исключением нескольких достаточно давно изданных книг [34, 40, 38, 23, 25], содержание которых во многом устарело, на русском языке отсутствует литература, посвященная методам вычислительной электродинамики.

Между тем, в России используется целый ряд коммерческих программ моделирования высокочастотных электромагнитных полей, таких как Ansoft HFSS, CST Microwave Studio, QuickWave Quick3d, Sonnet Sonnet, SPEAG SEMCAD, EMSS FEKO и другие. Грамотное и эффективное использование этих программ требует от пользователя понимания численных методов, которые в этих программах используются. В справочном материале, сопровождающем программы, на многие вопросы ответы отсутствуют. Актуальна и задача создания оригинальных программных средств с учетом специфических особенностей отечественной науки и промышленности. Появившиеся в последнее время книги [6, 4, 5, 3] посвящены, преимущественно, описанию работы с конкретными программами электродинамического моделирования — HFSS, FEKO и не содержат достаточно полного описания современных численных методов решения краевых задач электродинамики.

Автор надеется, что данная книга частично восполнит этот пробел. В книге излагаются понятия и уравнения классической электродинамики, математическая постановка краевых и начально-краевых задач, основные численные методы расчета электромагнитного поля и параметров высокочастотных электродинамических систем, рассматриваются способы быстрого расчета их частотных характеристик, методы встраивания сосредоточенных элементов в полевую модель. Изложение иллюстрируется примерами решения конкретных задач. Основное внимание уделено методам, наиболее широко используемым в современных вычислительных программах — методам конечных разностей, конечных элементов и интегральных уравнений (методу моментов), а также методу матрицы линий передачи.

Естественно, что в одной книге невозможно подробно описать все численные методы и особенности их реализации. Поэтому автор более или менее подробно описывает только те методы, в разработке и реализации которых он принимал участие. По этой причине в книге не рассматриваются квазиоптические методы расчета, такие, как однородная теория диффракции (UTD), метод лучей (геометрическая оптика) и некоторые другие методы, также нашедшие достаточно широкое применение. Описание этих методов содержится, например, в работах [248] и [215].

Книга предназначена для научных работников, инженеров и аспирантов, занимающихся проблемами вычислительной электродинамики или использующих ее аппарат и программные средства при проектировании высокочастотных и сверхвысокочастотных устройств. Книга может быть полезна также для студентов-магистрантов, обучающихся по соответствующим образовательным программам. Автор старался не перегружать изложение сложным математическим аппаратом, поэтому доказательства существования решения, его сходимости и устойчивости в книге, как правило, не приводятся. Этот материал можно посмотреть в книгах по вычислительной математике, на которые сделаны ссылки.

Автор выражает искреннюю признательность научным сотрудникам компании LG Electronics R&D Lab в Санкт-Петербурге к.ф.-м.н. Роману Игоревичу Тихонову и к.ф.-м.н. Роману Вячеславовичу Салимову за сотрудничество в разработке программ и помощь в проведении расчетов.

Основные обозначения

В книге используется международная система единиц СИ. Скалярные величины обозначаются латинскими буквами, набранными курсивом (a, A) или греческими буквами (α, Ψ). Математические константы обозначаются латинскими буквами, набранными прямым шрифтом, или греческими буквами ($\mathrm{e}, \mathrm{i}, \pi$). Векторы, тензоры и матрицы обозначаются символами, набранными прямым полужирным шрифтом ($\mathbf{a}, \mathbf{A}$). В необходимых случаях обозначения матриц (включая векторы-столбцы и векторы-строки) заключаются в прямые скобки ($|\mathbf{a}|, |\mathbf{A}|$), а обозначения тензоров надчеркиваются дважды ($\overline{\overline{\varepsilon}}, \overline{\overline{\mu}}$). Определители и нормы матриц заключаются в двойные прямые скобки ($||\mathbf{A}||$). Комплексные амплитуды (фазоры) в необходимых случаях снабжаются точками над символом ($\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}$). Величины электрического типа обозначаются верхним индексом e ($\mathbf{E}^e$), а величины магнитного типа – верхним индексом m ($\mathbf{E}^m$). Если эти индексы у обозначений отсутствуют, подразумеваются величины электрического типа. Операторы обозначаются латинскими «рукописными» буквами $\mathscr{A}, \mathscr{L}$.

$\mathbf{A}^e$ — векторный потенциал электрического типа, $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}$;
$\mathbf{A}^m$ — векторный потенциал магнитного типа, $\text{А} \cdot \text{с}/\text{м}$;
$\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\text{В} \cdot \text{с}/\text{м}^2$;
B — реактивная электрическая проводимость, См;
$c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме;
$\mathbf{D}$ — вектор электрической индукции $\text{А} \cdot \text{с}/\text{м}^2$;
$\mathrm{e} = 2{,}71828$ — основание натуральных логарифмов;
$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл — абсолютная величина заряда электрона;
$\mathbf{e}_i$ — орт оси i ортогональной криволинейной системы координат;
$\mathbf{e}_n$, $\widehat{\mathbf{n}}$ — орт внешней нормали к поверхности;
$\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, В/м;
f — частота, Гц;
G — активная электрическая проводимость, См;
$\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, А/м;
$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ — мнимая единица;
I^e — электрический ток, А;
$\mathbf{J}^e$ — плотность электрического тока, $\text{А}/\text{м}^2$;
$\mathbf{J}_s^e$ — поверхностная плотность электрического тока, А/м;
I^m — магнитный ток, В;
$\mathbf{J}^m$ — плотность магнитного тока, $\text{В}/\text{м}^2$;

$\mathbf{J}_s^m$ — поверхностная плотность магнитного тока, В/м;
$k, \mathbf{k}$ — волновое число, волновой вектор, 1/м;
$k_0, \mathbf{k}_0$ — волновое число, волновой вектор в свободном пространстве, 1/м;
$\mathbf{M}$ — намагниченность, А/м;
n — показатель преломления среды;
n_p, n_g — замедление фазовой и групповой скоростей волны;
P — мощность, Вт;
$\mathbf{p}$ — вектор Пойнтинга плотности мощности (потока энергии), Вт/м^2;
$\mathbf{P}$ — электрическая поляризация (электрический момент), А $\cdot$ с/м^2;
Q — добротность;
q^e — электрический заряд, Кл;
q^m — магнитный заряд, В$\cdot$с;
R — активное электрическое сопротивление, Ом;
U, V — электрическое напряжение (разность потенциалов), В;
W — энергия, Дж;
w — плотность энергии, Дж/м^3;
$\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{z}}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ — орты осей декартовой системы координат;
X — реактивное электрическое сопротивление, Ом;
Y — полная проводимость, См;
Y_0 — характеристическая проводимость среды, См;
Y_c — характеристическая проводимость линии передачи, См;
Y_g — волновая проводимость линии передачи, См;
Z — полное сопротивление, Ом;
Z_0 — характеристическое сопротивление среды, Ом;
Z_c — характеристическое сопротивление линии передачи, Ом;
Z_g — волновое сопротивление линии передачи, Ом;
α — постоянная затухания, 1/м;
β — постоянная фазы, 1/м;
$\mathbf{\Gamma}^e$ — электрический вектор Герца, В $\cdot$ м;
$\mathbf{\Gamma}^m$ — магнитный вектор Герца, А $\cdot$ м;
δ — глубина проникновения, м;
ε — абсолютная диэлектрическая проницаемость, А $\cdot$ с/(В $\cdot$ м);
$\varepsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) \approx 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ — диэлектрическая постоянная, А $\cdot$ с/(В $\cdot$ м);
$\eta_0 = 120\pi \approx 377$ Ом — характеристическое сопротивление вакуума;
$\varkappa$ — электрическая восприимчивость;
λ — длина волны в свободном пространстве, м;
λ_c — критическая длина волны в линии передачи;

λ_g — длина волны в линии передачи, м;
μ — магнитная проницаемость, $В \cdot с/(А \cdot м)$;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ — магнитная постоянная, $В \cdot с/(А \cdot м)$;
ρ^e — плотность электрического заряда, $Кл/м^2$;
ρ^m — плотность магнитного заряда, $В \cdot с/м^2$;
ρ — удельное сопротивление, Ом/м;
σ — электропроводность (электрическая проводимость), См/м;
τ — постоянная релаксации, с;
φ — фаза;
Φ^e — скалярный потенциал электрического типа, В;
Φ^m — скалярный потенциал магнитного типа, А;
Ψ — магнитный поток, $В \cdot с$;
χ — магнитная восприимчивость;
$\omega = 2\pi f$ — круговая частота, $с^{-1}$.

Введение

Высокочастотная электродинамическая система предназначена для создания электромагнитного поля заданной конфигурации. Поэтому расчет и проектирование таких систем основаны на решении уравнений Максвелла, составляющих основу классической электродинамики.

Нельзя не удивляться разнообразию физических явлений, которые описываются этими замечательными уравнениями, впервые опубликованными в 1864 г. — от электрических и магнитных полей маленьких кусочков янтаря и железной руды, благодаря которым были открыты электричество и магнетизм, до электромагнитных полей галактик, пульсаров, черных дыр и реликтового излучения. К этому перечню надо добавить электромагнитные поля, созданные человеком — от бесконечно слабых радиоволн, приходящих к нам от межпланетных космических зондов, до сверхсильных полей, используемых в энергетике и экспериментальной физике.

Такое обилие возможных решений позволяет предположить, что отыскание среди них решения конкретной задачи, удовлетворяющей заданным начальным и граничным условиям, весьма затруднительно. Действительно, в настоящее время точное решение уравнений Максвелла в областях произвольной формы, заполненных средой с произвольными свойствами, невозможно. Поэтому, в зависимости от формы области, в которой ищется решение, свойств заполняющей ее среды, заданных начальных и граничных условий для решения уравнений Максвелла используются различные методы.

В областях правильной формы (шар, эллипсоид, цилиндр, параллелепипед) с линейным однородным изотропным заполнением и простыми граничными условиями известны аналитические решения, т. е. формулы, выражающие электрическое и магнитное поле через известные функции координат и времени (или в виде сходящихся рядов по этим функциям). Такие решения называют «точными» в том смысле, что их можно вычислить с любой заданной точностью (при отсутствии ошибок округления).

В более сложных случаях точное решение задачи найти не удается и приходится ее решать приближенными (численными) методами. Следует отметить, что любой метод решения задач электродинамики на определенных этапах предполагает проведение операций над числами. В связи с этим необходимо уточнить, что имеется в виду под «численными методами решения задач электродинамики», которые рассматриваются в настоящей книге. По-видимому, строгое определение этого понятия дать достаточно трудно. В то же время следует отметить следующие особенности численных методов решения физических задач:

- решение задачи получается в результате выполнения определенной конечной последовательности арифметических действий (алгоритма), которая не может быть выражена с помощью одной или нескольких математических формул, связывающих искомые величины с заданными;
- алгоритм решения предусматривает полностью формализованные процедуры получения всех промежуточных и окончательных результатов из строго определенного набора исходных данных. Для задач электродинамики, например, таким набором является конфигурация расчетной области, электрофизические параметры заполняющей ее среды, граничные и начальные условия, сторонние по отношению к данной задаче токи и заряды.

Для численного анализа какой-либо физической проблемы необходимо построить ее *математическую модель*, учитывающую все существенные для данной задачи особенности реального процесса. Проблемы построения математических моделей интенсивно изучаются последние полвека. Они рассматриваются, в частности, в книгах [52, 47]. Следует отметить, что математическая модель не идентична объекту, а является его приближенным описанием. Поэтому, в зависимости от требований к точности и универсальности моделей, она может иметь различную сложность и требовать для реализации различных вычислительных ресурсов.

Процесс построения математической модели можно разбить на следующие этапы:

1. Постановка задачи — определение целей расчета и класса решаемых задач, определение необходимого объема входной и выходной информации, а также допустимой погрешности результатов решения.
2. Аналитическая обработка — формулировка уравнений, начальных и граничных условий, описание формы расчетной области и свойств заполняющей ее среды, выбор метода решения, преобразование уравнений модели к виду, наиболее

подходящему для данного численного метода, априорное исследование свойств полученных уравнений и их решений.

3. Дискретизация модели — переход от непрерывных функций к дискретным и от функциональных уравнений к системе алгебраических уравнений, в определенном смысле приближающейся к исходным уравнениям.
4. Решение полученной системы алгебраических уравнений с заданной точностью. На этом этапе важную роль играет выбор метода решения, наиболее подходящего для данной системы уравнений.
5. Обработка результатов — расчет поля, характеристик и параметров системы по данным решения и их визуализация. Часто на этом этапе приходится восстанавливать отклик системы в широком диапазоне частот по результатам решения в отдельных точках этого диапазона.

На практике перечисленные этапы не являются независимыми. Так, например, выбор метода дискретизации влияет на свойства получаемой системы алгебраических уравнений, что, в свою очередь, определяет выбор метода решения этой системы. От предыдущих этапов зависят и способы вычисления параметров и характеристик системы.

Одной из наиболее важных характеристик математической модели является погрешность получаемых с ее помощью результатов. Эта погрешность складывается из составляющих, вносимых на каждом этапе численного решения. В соответствии с принятой классификацией к составляющим общей погрешности решения относятся:

- Неустранимая погрешность, возникающая на первом этапе за счет неточности исходных данных. Как показывает название, эта погрешность не может быть устранена на последующих этапах, однако она может существенно увеличиваться при решении так называемых некорректных задач.
- Погрешность математической модели, возникающая на втором этапе вследствие неполной неадекватности используемой модели реальному физическому объекту или процессу.
- Погрешность метода, возникающая в результате дискретизации задачи.
- Вычислительная погрешность, возникающая на этапах 4 и 5 в связи с конечной точностью представления чисел и конечным числом операций на ними.

Первые алгоритмы и программы решения краевых задач электродинамики появились в начале 60-х годов прошлого века. За последующие 20 лет были созданы эффективные программы решения двухмерных скалярных и векторных задач, что позволило создать математические модели волноводов произвольного поперечного сечения, объемных резонаторов и других электродинамических систем, регулярных в одном из направлений. В середине 80-х годов были разработаны первые программы решения трехмерных задач в частотной и временно́й областях.

В настоящее время имеется целый ряд коммерческих программных продуктов, способных решать трехмерные краевые и начально-краевые задачи электродинамики, обладающих высокой эффективностью, универсальностью и удобным пользовательским интерфейсом. Проблема, однако, не может считаться окончательно решенной. Перед разработчиками программного обеспечения стоят проблемы экономии вычислительных ресурсов, расширения класса решаемых задач на более сложные и электрически протяженные объекты, повышения точности результатов расчета параметров электродинамических систем. Слабо разработаны полевые методы синтеза и оптимизации электродинамических систем, методы решения обратных и нелинейных задач. Над решением этих проблем интенсивно работают ученые и программисты разных стран.

Материал книги организован следующим образом:

В главе 1 кратко излагаются основные уравнения классической электродинамики и рассматривается математическая постановка различных электродинамических задач. В главе 2 описывается алгоритм решения уравнений Максвелла методом конечных разностей в частотной области, а в главе 3 — во временно́й области. В главе 4 рассматривается применение метода конечных элементов к решению краевых задач электродинамики в частотной области, а в главе 5 изложена реализация этого метода во временно́й области. В главе 6 описывается метод моментов (интегральных уравнений) в частотной области. В главе 7 рассматривается решение уравнений Максвелла методом матрицы линий передачи (МЛП) во временно́й области. В приложениях приводятся некоторые полезные соотношения и теоремы.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла составляют основу классической электродинамики. В современных обозначениях они имеют следующий вид:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t); \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t); \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \tag{1.1.4}$$

В этих уравнениях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции, $\mathbf{J}$ и ρ — плотность электрического тока и электрического заряда, ∇ — оператор Гамильтона, косой крест означает векторное произведение, а точка — скалярное произведение векторов, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения (точки, в которой определяется поле), t — время.

Плотность электрического тока целесообразно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_i, \tag{1.1.5}$$

где $\mathbf{J}_c$ — плотность тока, наведенного электрическим полем в среде с конечной электропроводностью, $\mathbf{J}_i$ — плотность *стороннего тока*, внешнего по отношению к данной задаче. Этот ток, наряду с зарядом, и возбуждает электромагнитное поле в среде.

Применим операцию дивергенции к уравнению (1.1.1):

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{J}. \tag{1.1.6}$$

Подставив в полученную формулу $\nabla \cdot \mathbf{D}$ из (1.1.3), получим *уравнение непрерывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{1.1.7}$$

выражающее закон сохранения заряда в дифференциальной форме. Как видим, этот фундаментальный закон содержится в уравнениях Максвелла. Если, однако, считать закон сохранения заряда независимым, уравнение Максвелла (1.1.3) может быть получено как следствие из уравнения (1.1.1) при некоторых весьма общих дополнительных предположениях. Действительно, подставив в (1.1.6) уравнение непрерывности (1.1.7), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0,$$

откуда

$$\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho = \mathrm{const}.$$

Считая, что в начальный момент времени заряды и поля отсутствуют, можно положить $\mathrm{const} = 0$, что приводит к уравнению (1.1.3).

Аналогично, из уравнения (1.1.2), считая, что магнитные заряды и поля в начальный момент времени отсутствуют, получим уравнение Максвелла (1.1.4). Таким образом, третье и четвертое уравнения Максвелла не являются независимыми, однако они часто оказываются полезными при решении различных задач.

Уравнения Максвелла (1.1.1), (1.1.2) представляют собой систему из шести скалярных дифференциальных уравнений в частных производных с двенадцатью неизвестными — проекциями векторных функций $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ на оси координат. Для того, чтобы эта система уравнений стала определенной, к ней необходимо добавить материальные уравнения — соотношения, связывающие напряженности полей, индукции и плотность тока в среде:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \xi \mathbf{H}(\mathbf{r}, t); \tag{1.1.8}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \zeta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t); \tag{1.1.9}$$

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{1.1.10}$$

Последнее уравнение выражает закон Ома в дифференциальной форме.

В уравнениях (1.1.8)–(1.1.10) диэлектрическую проницаемость среды ε, магнитную проницаемость μ, кросс-проницаемости ξ и ζ, электропроводность σ, вообще говоря, необходимо рассматривать как тензоры второго ранга. Если все параметры среды скалярны, ее называют изотропной, в противном случае среда анизотропна. Если кросс-проницаемости ξ и (или) ζ отличны от нуля, среду называют бианизотропной.

Диэлектрическую и магнитную проницаемость удобно представить в виде произведений:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r; \quad \mu = \mu_0 \mu_r,$$

где $\varepsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2) \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м и $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx \approx 1{,}256 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — электрическая и магнитная постоянные, ε_r, μ_r — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с — скорость света.

В уравнениях Максвелла (1.1.1)–(1.1.4) отсутствуют магнитные токи и заряды, так как до настоящего времени в природе они не обнаружены. Тем не менее, часто бывает удобно использовать фиктивные магнитные токи и заряды. Система уравнений Максвелла для полей, возбуждаемых магнитными токами и зарядами, имеет вид

$$\nabla \times \mathbf{H}^m(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}^m(\mathbf{r}, t)}{\partial t}; \tag{1.1.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^m(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{J}^m(\mathbf{r}, t); \tag{1.1.12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^m(\mathbf{r}, t) = 0; \tag{1.1.13}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^m(\mathbf{r}, t) = \rho^m(\mathbf{r}, t). \tag{1.1.14}$$

Верхний индекс «m» обозначает величины «магнитного» типа в отличие от величин «электрического» типа, входящих в уравнения (1.1.1)–(1.1.4), которые в необходимых случаях будут снабжаться верхним индексом «e». Полное поле в системе представляет суперпозицию полей электрического (E) и магнитного (H) типов:

$$\begin{gathered}
\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^m; \\
\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^m; \\
\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^m; \\
\mathbf{B} = \mathbf{B}^e + \mathbf{B}^m.
\end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что произведя в уравнениях (1.1.1)–(1.1.4) замену

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}^e \to \mathbf{H}^m; \quad \mathbf{H}^e \to \mathbf{E}^m; \quad \mathbf{D}^e \to -\mathbf{B}^m; \\
\mathbf{B}^e \to -\mathbf{D}^m; \quad \mathbf{J}^e \to -\mathbf{J}^m; \quad \rho^e \to -\rho^m,
\end{gathered}$$

получим систему уравнений (1.1.11)–(1.1.14). Произведя обратную замену в уравнениях магнитного типа, получим уравнения электрического типа. Это свойство уравнений Максвелла называют *перестановочной двойственностью*.

Приведенные выше уравнения содержат в качестве независимой переменной время. Как говорят, они определены во *временно́й области* (Time Domain, TD). Очевидно, что они справедливы для полей, изменяющихся во времени по произвольному закону. Часто, однако, в природе и технике встречаются поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону:

$$a(\mathbf{r}, t) = A_m(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1.1.15}$$

где a — одна из проекций векторов поля на оси координат, A_m — ее амплитуда, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота, f — частота изменения поля, φ_0 — начальная фаза. Аргумент косинуса $\varphi = \omega t + \varphi_0$ называют фазой величины a. Выражение (1.1.15) удобно записывать в экспоненциальной форме:

$$a(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}(\dot{A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}), \tag{1.1.16}$$

где $\dot{A} = A_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}$ — комплексная амплитуда величины a.

Записав все составляющие электромагнитного поля в виде (1.1.16) и подставив их в уравнения (1.1.1)–(1.1.4), после несложных преобразований получим уравнения Максвелла в комплексной форме:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \mathrm{i}\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}; \tag{1.1.17}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\mathrm{i}\omega\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}; \tag{1.1.18}$$

$$\nabla \cdot (\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}) = \dot{\rho}; \tag{1.1.19}$$

$$\nabla \cdot (\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}) = 0. \tag{1.1.20}$$

где $\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0\dot{\varepsilon}_r = \varepsilon_0(\varepsilon'_r - \mathrm{i}\varepsilon''_r)$ и $\dot{\mu} = \mu_0\dot{\mu}_r = \mu_0(\mu'_r - \mathrm{i}\mu''_r)$ — комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а точками над буквами отмечены комплексные амплитуды (*фазоры*) векторов напряженности электрического и магнитного полей. Аналогичные уравнения получаются и для полей магнитного типа:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}}^m = \mathrm{i}\omega\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}^m; \tag{1.1.21}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}}^m = -\mathrm{i}\omega\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{J}}^m; \tag{1.1.22}$$

$$\nabla \cdot (\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}^m) = 0; \tag{1.1.23}$$

$$\nabla \cdot (\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}^m) = \dot{\rho}^m, \tag{1.1.24}$$

а также для уравнения непрерывности (1.1.7):

$$\nabla\dot{\mathbf{J}}^e + \mathrm{i}\omega\dot{\rho}^e = 0. \tag{1.1.25}$$

Полученные уравнения вместо времени содержат в качестве независимой переменной угловую частоту. Поэтому говорят, что они определены в *частотной области* (Frequency Domain, FD).

В линейной среде временное и частотное представления функций связаны прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt; \tag{1.1.26}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega. \tag{1.1.27}$$

Поэтому выбор временной или частотной области определяется особенностями конкретной задачи.

Существование электромагнитного поля проявляется в том, что оно воздействует с определенной силой $\mathbf{F}$ (силой Лоренца) на электрически заряженные тела:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

где q — заряд тела, а $\mathbf{v}$ — его скорость. При этом поле меняет состояние тела и его энергию. Поэтому электромагнитное поле способно производить работу и, следовательно, обладает энергией и импульсом.

Энергия электромагнитного поля, запасенная в единице объема (удельная энергия) определяется формулой

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}. \tag{1.1.28}$$

Первое слагаемое этого выражения определяет удельную энергию электрического, а второе — магнитного поля. Поток энергии, проходящий через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно движению энергии (удельная мощность) определяется вектором Пойнтинга

$$\mathbf{p} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \tag{1.1.29}$$

Очевидно, что имеет место равенство

$$\mathbf{p} = w\mathbf{v}_w, \tag{1.1.30}$$

где $\mathbf{v}_w$ — скорость движения (переноса) энергии.

Мощность, рассеиваемая в единичном объеме среды вследствие ее конечной электропроводности

$$p_d = \sigma|\mathbf{E}|^2. \tag{1.1.31}$$

Последнее выражение есть закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме.

Если поле изменяется во времени по гармоническому закону, его «мгновенная» энергия и мощность также зависят от времени. Для высокочастотных полей наибольший интерес представляют средние за период колебаний значения удельной энергии, удельной мощности и мощности рассеяния [51]:

$$\langle w\rangle = \frac{1}{4}\,\varepsilon'\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{4}\,\mu'\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^*; \tag{1.1.32}$$

$$\langle \mathbf{p}\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*); \tag{1.1.33}$$

$$\langle p_d\rangle = \frac{1}{2}\,\varepsilon''\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{E}}^* + \frac{1}{2}\,\mu''\dot{\mathbf{H}}\cdot\dot{\mathbf{H}}^*. \tag{1.1.34}$$

1.2. Временна́я и пространственная дисперсия среды

При помещении электрически нейтрального диэлектрика во внешнее электрическое поле электрически заряженные частицы внутри него смещаются относительно положений равновесия. В результате появляется электрический момент среды, создающий внутреннее электрическое поле, которое складывается с внешним полем. Этот процесс называется *поляризацией*. Материальное уравнение (1.1.8) при $\xi = 0$ можно записать в виде, явно учитывающем процесс поляризации:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t), \tag{1.2.1}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации, равный электрическому моменту единицы объема диэлектрика. Аналогично, при помещении магнетика в магнитное поле возникает магнитный момент. Уравнение (1.1.9) (при $\zeta = 0$) записывается в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0[\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{M}(\mathbf{r},t)], \tag{1.2.2}$$

где $\mathbf{M}$ — вектор намагниченности (магнитный момент единицы объема магнетика). Поляризация и намагниченность среды зависят от напряженности поля:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\varkappa\mathbf{E}(\mathbf{r},t); \quad \mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \chi\mathbf{H}(\mathbf{r},t), \tag{1.2.3}$$

где $\varkappa, \chi$ — электрическая и магнитная восприимчивости. В слабых полях процессы поляризации и намагничивания линейны, т. е. восприимчивости не зависят от модуля напряженности поля.

Материальные уравнения (1.2.3) предполагают локальную мгновенную связь поляризации и намагниченности с напряженностями поля. Это означает, что значение поляризации или намагниченности в данной точке в данный момент времени зависит только от значений напряженностей поля в той же точке и в тот же момент времени. В действительности процессы поляризации и намагничивания среды имеют определенную длительность, т. е. они инерционны. В этом случае говорят, что среда обладает *временнóй дисперсией*. Кроме того, существуют коллективные движения частиц среды, например, при повороте доменов в ферромагнетиках или сегнетоэлектриках, из-за чего значения $\mathbf{P}, \mathbf{M}$ зависят от значений напряженностей поля не только в данной точке, но и в соседних точках пространства. Это явление называют *пространственной дисперсией* среды. С учетом пространственной и временной дисперсии связь между векторами поляризации и намагниченности, с одной стороны, и векторами напряженности электрического и магнитного поля, с другой, описывается интегральными соотношениями

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{V} \varkappa_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')\, dV'; \tag{1.2.4}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int\limits_{V} \chi_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')\mathbf{H}(\mathbf{r}', t')\, dV'. \tag{1.2.5}$$

В этих выражениях $\varkappa_d, \chi_d$ — дифференциальные восприимчивости среды, которые следует рассматривать как тензоры второго ранга. В однородной изотропной непараметрической среде эти величины скалярны и зависят только от расстояния между точками и интервала времени:

$$\varkappa_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \varkappa_d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t');$$
$$\chi_d(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') = \chi_d(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - t').$$

Пространственная дисперсия становится заметной, если характерное расстояние l, на которое перемещаются частицы за один период колебаний, соизмеримо с длиной волны λ, т. е. если $l/\lambda \geqslant 1$. В микроволновом диапазоне это условие выполняется редко, поэтому в большинстве случаев пространственной дисперсией можно пренебречь.

Значительно чаще наблюдается временная дисперсия. Анализ процессов поляризации и намагниченности с учетом их инерционности основан на решении уравнений движения заряженных частиц в среде под действием внешнего поля. Эти процессы подробно рассмотрены в монографиях [51, 54, 239] и многих других. Как показано в этих работах, в общем случае уравнение движения, например, вектора поляризации, связывает значения самого вектора и его производных по времени со значениями вектора напряженности электрического поля и его производными:

$$\mathbf{P} + a_1\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + a_2\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \ldots = \varepsilon_0\left(b_0\mathbf{E} + b_1\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + b_2\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \ldots\right). \tag{1.2.6}$$

Простая модель, достаточно хорошо описывающая процессы поляризации многих твердых диэлектриков, была предложена Дебаем. Она учитывает только первые производные в уравнении (1.2.6):

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\mathbf{P} = \varepsilon_0\left(\varkappa_\infty\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\varkappa_0}{\tau}\mathbf{E}\right), \tag{1.2.7}$$

где $\varkappa_0$, $\varkappa_\infty$ — значения восприимчивости в постоянном ($\partial\mathbf{E}/\partial t = 0$) и быстропеременном ($|\partial\mathbf{E}/\partial t| \gg |\mathbf{E}/\tau|$) полях, τ — постоянная времени диэлектрической релаксации.

Процесс поляризации многих газов и некоторых твердых диэлектриков хорошо описывается моделью Лоренца:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \omega_0^2\mathbf{P} = \\ = \varepsilon_0\left[\varkappa_\infty\left(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \omega_0^2\mathbf{E}\right) + (\varkappa_0 - \varkappa_\infty)\omega_0^2\mathbf{E}\right]. \tag{1.2.8}$$

Если диэлектрик находится в переменном электрическом поле, временная дисперсия приводит к поглощению энергии поля. В случае гармонических колебаний формально это можно описать введением комплексной диэлектрической проницаемости $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - \mathrm{i}\varepsilon''$, действительная и мнимая части которой зависят от частоты. Для модели Дебая эти зависимости определяются формулами

$$\varepsilon_r' = 1 + \varkappa_\infty + \frac{\varkappa_0 - \varkappa_\infty}{1 + (\omega\tau)^2}; \quad \varepsilon_r'' = \frac{\omega\tau(\varkappa_0 - \varkappa_\infty)}{1 + (\omega\tau)^2}. \tag{1.2.9}$$

Для модели Лоренца из уравнения (1.2.8) находим

$$\varepsilon_r' = 1 + \varkappa_\infty + (\varkappa_0 - \varkappa_\infty)\frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\nu^2}; \tag{1.2.10}$$

$$\varepsilon_r'' = (\varkappa_0 - \varkappa_\infty)\frac{2\nu\omega\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\nu^2\omega_0^2}, \tag{1.2.11}$$

где $\nu = 1/\tau$.

Аналогичные соотношения связывают векторы намагниченности и напряженности магнитного поля.

1.3. Электродинамические потенциалы и векторы Герца

Во многих случаях введение *электродинамических потенциалов* позволяет упростить решение задач электродинамики. Этот прием оказывается особенно эффективным при расчете поля в однородной изотропной среде. Векторный $\mathbf{A}$ и скалярный Φ потенциалы электрического типа вводятся следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\Phi; \tag{1.3.1}$$

$$\mathbf{H} = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.3.2}$$

При этом электродинамические потенциалы в однородной изотропной среде удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}; \tag{1.3.3}$$

$$\Delta\Phi - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\varepsilon^{-1}\rho, \tag{1.3.4}$$

которые справедливы, если векторный и скалярный потенциалы связаны так называемой *калибровкой Лоренца*:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} + \varepsilon\mu\,\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \tag{1.3.5}$$

В частотной области выражения (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (1.3.4) приобретают вид

$$\mathbf{E} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi; \tag{1.3.6}$$

$$\mathbf{H} = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.3.7}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}; \tag{1.3.8}$$

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = -\varepsilon^{-1}\rho. \tag{1.3.9}$$

В этих выражениях $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = k_0\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$ — волновое число, $k_0 = \omega/c$ — волновое число в свободном пространстве.

Таким образом, решив уравнения (1.3.3), (1.3.4) или (1.3.8), (1.3.9), можно затем найти электромагнитное поле с помощью выражений (1.3.1), (1.3.2) или (1.3.6), (1.3.7), которое тождественно удовлетворяет всем уравнениям Максвелла. При этом число неизвестных функций сокращается до четырех (три проекции вектора $\mathbf{A}$ и скаляр Φ).

Следует отметить, что, используя калибровку Лоренца, напряженность электрического поля можно выразитиь только через векторный потенциал. Действительно, подставив (1.3.5) в формулу (1.3.6), получим

$$\mathbf{E} = -\mathrm{i}\omega\mathbf{A} - \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon\mu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}). \tag{1.3.10}$$

Для дальнейшего сокращения числа неизвестных функций вводят *электрический вектор Герца* $\mathbf{\Gamma}$ с помощью следующих соотношений:

$$\mathbf{A} = \varepsilon\mu\,\frac{\partial\mathbf{\Gamma}}{\partial t}; \quad \Phi = -\nabla\cdot\mathbf{\Gamma}. \tag{1.3.11}$$

Потенциалы, определенные соотношениями (1.3.11), тождественно удовлетворяют условию (1.3.5), а из уравнения (1.3.3) следует, что электрический вектор Герца удовлетворяет неоднородному волновому уравнению

$$\nabla^2\mathbf{\Gamma} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\mathbf{\Gamma}}{\partial t^2} = \varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \mathbf{J}dt. \tag{1.3.12}$$

Решив это уравнение, можно вычислить напряженность электрического и магнитного полей по формулам, следующим из (1.3.1), (1.3.2) и (1.3.11):

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Gamma}) - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\mathbf{\Gamma}}{\partial t^2}; \tag{1.3.13}$$

$$\mathbf{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{\Gamma}; \tag{1.3.14}$$

Отметим, что магнитное поле, описываемое электрическим вектором Герца, как следует из (1.3.14), перпендикулярно этому вектору, в то время как электрическое поле может иметь как «поперечную» (направленную перпендикулярно вектору Герца), так и «продольную» (коллинеарную с вектором Герца) составляющую. Такое электромагнитное поле называют полем *электрического* (E) типа.

Подставив в формулу (1.3.13) уравнение (1.3.12), получим:

$$\mathbf{E} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{\Gamma}) + \varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \mathbf{J}dt. \tag{1.3.15}$$

Из выражений (1.3.14) и (1.3.15) следует, что если в расчетной области источники поля отсутствуют (плотность электрического тока равна нулю), электрическое и магнитное поля соленоидальны, т.е. выражаются через ротор вектора Герца. Следовательно, в таких областях электрический вектор Герца обладает свойством *градиентной инвариантности*: векторы $\mathbf{\Gamma}$ и $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma} - \nabla\psi$, где ψ — произвольная дважды дифференцируемая функция, определяют одно и то же электромагнитное поле, поскольку ротор градиента любой функции равен нулю.

Выразим «старый» вектор Герца $\mathbf{\Gamma}$ через «новый» $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$

$$\mathbf{\Gamma} = \widetilde{\mathbf{\Gamma}} + \nabla\psi$$

и подставим это выражение в (1.3.12), положив $\mathbf{J} = 0$:

$$\nabla^2\widetilde{\mathbf{\Gamma}} - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{\Gamma}}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla^2\psi - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что если функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mathrm{const}, \tag{1.3.16}$$

новый вектор Герца $\widetilde{\mathbf{\Gamma}}$ удовлетворяет тому же уравнению (1.3.12), что и старый.

Для полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, соотношения (1.3.15), (1.3.14) (1.3.12) принимают следующий вид:

$$\dot{\mathbf{E}} = \nabla\times(\nabla\times\dot{\mathbf{\Gamma}}) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega\dot{\varepsilon}}\,\dot{\mathbf{J}}; \tag{1.3.17}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathrm{i}\omega\dot{\varepsilon}\nabla\times\dot{\mathbf{\Gamma}}; \tag{1.3.18}$$

$$\nabla^2\dot{\mathbf{\Gamma}} + k^2\dot{\mathbf{\Gamma}} = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\,\dot{\mathbf{J}}; \tag{1.3.19}$$

Используя свойство перестановочной двойственности, нетрудно записать аналогичные соотношения для векторного и скалярного потенциалов магнитного типа $\mathbf{A}^m$, Φ^m, а также магнитного вектора Герца $\mathbf{\Gamma}^m$ (иногда называемого вектором Фитцджеральда):

$$\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{A}^m}{\partial t} + \nabla\cdot\Phi^m; \tag{1.3.20}$$

$$\mathbf{E} = \varepsilon^{-1}\nabla\times\mathbf{A}^m. \tag{1.3.21}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}^m - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\mathbf{A}^m}{\partial t^2} = \varepsilon\mathbf{J}^m; \tag{1.3.22}$$

$$\Delta\Phi^m - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\Phi^m}{\partial t^2} = \mu^{-1}\rho^m, \tag{1.3.23}$$

$$\mathbf{H} = -\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Gamma}^m) + \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\mathbf{\Gamma}^m}{\partial t^2}; \tag{1.3.24}$$

$$\mathbf{E} = -\mu\nabla\times\frac{\partial\mathbf{\Gamma}^m}{\partial t}; \tag{1.3.25}$$

$$\nabla^2\mathbf{\Gamma}^m - \varepsilon\mu\,\frac{\partial^2\mathbf{\Gamma}^m}{\partial t^2} = \mu^{-1}\int\limits_0^t \mathbf{J}^m dt. \tag{1.3.26}$$

Очевидно, что магнитный вектор Герца также обладает свойством градиентной инвариантности.

В области, не содержащей сторонних токов и зарядов, электромагнитное поле с одинаковым успехом описывается как электрическим, так и магнитным вектором Герца:

$$\dot{\mathbf{E}} = \nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{\Gamma}}^e = -\mathrm{i}\omega\mu\nabla \times \dot{\mathbf{\Gamma}}^m; \tag{1.3.27}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathrm{i}\omega\varepsilon\nabla \times \dot{\mathbf{\Gamma}}^e = \nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{\Gamma}}^m. \tag{1.3.28}$$

Отсюда следует, что электрический и магнитный векторы Герца связаны и могут быть выражены друг через друга:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{\Gamma}}^e = -\mathrm{i}\omega\mu\dot{\mathbf{\Gamma}}^m - \nabla\psi^e;$$
$$\nabla \times \dot{\mathbf{\Gamma}}^m = \mathrm{i}\omega\varepsilon\dot{\mathbf{\Gamma}}^e - \nabla\psi^m,$$

где ψ^e, ψ^m — произвольные дифференцируемые функции, которые можно положить, в частности, равными нулю.

Отметим также, что в области, свободной от источников поля, электрический и магнитный векторы Герца удовлетворяют одному и тому же однородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\dot{\mathbf{\Gamma}} + k^2\dot{\mathbf{\Gamma}} = 0. \tag{1.3.29}$$

В области, не содержащей источников поля, выражения (1.3.17) и (1.3.18) упрощаются. Действительно, пусть вектор Герца направлен параллельно оси x_3, $\dot{\mathbf{\Gamma}} = \dot{\Gamma}_3\widehat{\mathbf{x}}_3$. Представим $\dot{\Gamma}_3$ в виде произведения:

$$\dot{\Gamma}_3 = \Psi(x_1, x_2)\zeta(x_3)$$

(условия, при которых такое представление возможно, рассматриваются в разделе 1.9.2). Подставив это представление в (1.3.27) и (1.3.28) находим:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} = \frac{\partial\dot{\Gamma}_z}{\partial x_3} = \Psi\,\frac{\partial\dot{\zeta}}{\partial x_3};$$
$$\nabla(\nabla \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}) = \frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\nabla_\perp\Psi + \frac{\partial^2\dot{\zeta}}{\partial x_3^2}\Psi\widehat{\mathbf{x}}_3,$$

где символический оператор $\nabla_\perp$ действует только на поперечные координаты.

Подставив полученные выражения в (1.3.8), получим

$$\mathbf{E}^e = \frac{\partial\zeta^e}{\partial x_3}\nabla_\perp\Psi^e + \left(k^2\zeta^e + \frac{\partial^2\dot{\zeta}^e}{\partial x_3^2}\right)\Psi^e\widehat{\mathbf{x}}_3; \tag{1.3.30}$$

$$\mathbf{H}^e = \mathrm{i}\omega\varepsilon\zeta^e\nabla_\perp \times \Psi^e\widehat{\mathbf{x}}_3. \tag{1.3.31}$$

В этих выражениях соответствующие функции отмечены верхним индексом «e», чтобы подчеркнуть, что рассматривается электромагнитное поле *электрического типа*, определяемое электрическим вектором Герца (поле E-типа). Напряженность магнитного поля этого типа, как видно из выражения (1.3.31), имеет только поперечные составляющие, а электрическое поле — как поперечные, так и продольную составляющую (см. формулу (1.3.30)).

Магнитный вектор Герца определяет электромагнитное поле *магнитного* (H) типа:

$$\mathbf{E}^m = -\mathrm{i}\omega\mu\zeta^m\nabla_\perp \times \Psi^m\widehat{\mathbf{z}}. \tag{1.3.32}$$

$$\mathbf{H}^m = \frac{\partial\zeta^m}{\partial x_3}\nabla_\perp\Psi^m + \left(k^2\zeta^m + \frac{\partial^2\zeta^m}{\partial x_3^2}\right)\Psi^m\widehat{\mathbf{z}}. \tag{1.3.33}$$

Как видно, поле H-типа может иметь продольную составляющую напряженности магнитного поля, в то время как продольная составляющая электрического поля отсутствует. Произвольное электромагнитное поле может быть представлено суперпозицией полей E- и H-типов. У этого *гибридного* (EH или HE) поля все шесть составляющих отличны от нуля.

Возможна ситуация, когда как электрическое, так и магнитное поле имеют только поперечные составляющие. Такое поле называют «поперечным» полем T-типа. Примером служит, например, плоская электромагнитная волна, если координата x_3 совпадает с направлением распространения волны. [1)]

1.4. Начальные и граничные условия

Для решения уравнений Максвелла во временной области необходимо задать начальные и граничные условия таким образом, чтобы решение существовало и было единственным.

Как известно [39], решение внутренней задачи электродинамики в объеме V, ограниченном поверхностью S, существует и единственно, если

- В начальный момент времени t_0 во всем объеме V заданы значения напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t_0), \mathbf{H}(\mathbf{r}, t_0)$.
- На поверхности S заданы
  - касательная оставляющая напряженности электрического поля $\mathbf{E}_\tau$, или

[1)] В англоязычной литературе используются обозначения TM (transverse magnetic), TE (transverse electric) и TEM (transverse electromagnetic) для E-, H- и T-типов поля соответственно.

— касательная оставляющая напряженности магнитного поля $\mathbf{H}_\tau$, или
— на части поверхности задана $\mathbf{E}_\tau$, а на остальной части поверхности $\mathbf{H}_\tau$.

- В объеме V или в его части электропроводность среды отлична от нуля.

Если задача решается в частотной области, начальное условие не требуется, а последнее условие заменяется на требование отличия от нуля мнимых частей диэлектрической и (или) магнитной проницаемости.

Что касается внешней задачи электродинамики, то ее решение существует и единственно, если на поверхности областей, вне которых определяется электромагнитное поле, заданы либо $\mathbf{E}_\tau$, либо $\mathbf{H}_\tau$, а энергия электромагнитного поля, создаваемого источниками конечной интенсивности и размера, во всем пространстве остается конечной:

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_V \left(\varepsilon|\mathbf{E}|^2+\mu|\mathbf{H}|^2\right) r^2\,dr\,d\theta\,d\varphi<\infty, \tag{1.4.1}$$

где r — расстояние от источников, а объем V заполняет все пространство.

Среда, заполняющая расчетную область V, может быть кусочно-неоднородной, т. е. состоять из нескольких подобластей, на границе между которыми параметры среды меняются скачком. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме неприменимы к разрывным функциям, поэтому приходится их решать в каждой области отдельно, а решения для разных подобластей «сшивать» с помощью граничных условий на поверхностях раздела, которые выводятся из уравнений Максвелла в интегральной форме путем предельного перехода [17].

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся граничные условия (ГУ).

1. На поверхности раздела двух диэлектриков касательные составляющие напряженностей электрического и магнитного полей должны удовлетворять условиям:

$$\widehat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1\right)=\mathbf{J}_s^m; \tag{1.4.2}$$

$$\widehat{\mathbf{n}}\times\left(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1\right)=\mathbf{J}_s^e, \tag{1.4.3}$$

где $\widehat{\mathbf{n}}$ — нормаль к поверхности раздела, направленная из первой среды во вторую, $\mathbf{J}_s^e$ и $\mathbf{J}_s^m$ — поверхностные плотности электрического и магнитного тока, протекающего по поверхности раздела.

Нормальные составляющие индукции по обе стороны поверхности раздела связаны соотношениями

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s^e; \tag{1.4.4}$$

$$\widehat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \rho_s^m, \tag{1.4.5}$$

где ρ_s^e и ρ_s^m — поверхностные плотности электрического и магнитного заряда, находящегося на поверхности раздела. Отметим, что если поверхностные токи отсутствуют, касательные составляющие напряженности электрического и магнитного полей непрерывны, а при отсутствии поверхностных зарядов непрерывны нормальные составляющие электрической и магнитной индукции.

2. На поверхности раздела диэлектрика и идеального проводника (электрической стенке) касательная составляющая вектора напряженности электрического поля обращается в нуль:

$$\widehat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0, \tag{1.4.6}$$

где $\mathbf{E}$ — поле в диэлектрике.

3. На поверхности раздела диэлектрика и идеального магнетика (магнитной стенке) касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля равна нулю:

$$\widehat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = 0. \tag{1.4.7}$$

Так как ротор вектора перпендикулярен самому вектору, из уравнений Максвелла следует, что на электрической стенке нормальная составляющая вектора $\mathbf{H}$ равна нулю, а на магнитной стенке — нормальная составляющая вектора $\mathbf{E}$ обращается в нуль (предполагается, что среда изотропна).

4. На поверхности раздела диэлектрика и металла с конечной электропроводностью. Как известно, амплитуда переменного электромагнитного поля в металле экспоненциально уменьшается по мере удаления от поверхности:

$$|\dot{\mathbf{E}}(z)| = |\dot{\mathbf{E}}_0| \mathrm{e}^{-z/\delta},$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{k_0\eta_0\sigma\mu_r}}$$

— глубина проникновения поля в металл (толщина скин-слоя), σ — удельная электропроводность металла, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx$ ≈ 377 Ом — характеристическое сопротивление свободного пространства. На высоких частотах глубина проникновения мала, и обычно можно считать, что в металле поле отсутствует, а по его поверхности, обладающей поверхностным сопротивлением

$$\dot{Z}_s = (1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{k_0\eta_0\mu_r}{2\sigma}},$$

течет ток с поверхностной плотностью

$$\dot{\mathbf{J}}_s = \dot{\mathbf{H}} \times \widehat{\mathbf{n}} = \dot{Z}_s^{-1}\dot{\mathbf{E}}_\tau.$$

В этом случае на поверхности металла выполняются приближенные граничные условия Леонтовича, часто называемые импедансными граничными условиями:

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = \dot{Z}_s(\dot{\mathbf{H}}_\tau \times \widehat{\mathbf{n}}), \tag{1.4.8}$$

где $\dot{\mathbf{E}}_\tau, \dot{\mathbf{H}}_\tau$ — касательные составляющие комплексных амплитуд напряженности электрического и магнитного полей. Эти условия справедливы, если радиус кривизны поверхности металла много больше глубины проникновения. Выражение (1.4.8) может быть записано относительно полных векторов напряженности полей следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}} - (\widehat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{E}})\widehat{\mathbf{n}} = \dot{Z}_s\dot{\mathbf{H}} \times \widehat{\mathbf{n}}, \tag{1.4.9}$$

или

$$\widehat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{E}} = \dot{Z}_s\left[\dot{\mathbf{H}} - (\widehat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{H}})\widehat{\mathbf{n}}\right]. \tag{1.4.10}$$

Используя уравнения Максвелла, эти соотношения можно записать в более удобной форме

$$\widehat{\mathbf{n}} \times (\widehat{\mathbf{n}} \times \dot{\mathbf{E}}) - \mathrm{i}\frac{\dot{Z}_s}{k_0\eta_0\mu_r}\widehat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{E}}) = 0; \tag{1.4.11}$$

Эту формулу называют смешанными граничными условиями или граничными условиями третьего рода.

5. На бесконечно тонком резистивном листе, по которому течет поверхностный электрический ток, пропорциональный касательной составляющей напряженности электрического поля, имеют место граничные условия [178]:

$$\widehat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0;$$
$$\widehat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s^e$$

или

$$\widehat{\mathbf{n}} \times (\widehat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) = Z_s^e\widehat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1),$$

где Z_s^e — электрическое поверхностное сопротивление в омах на квадрат. Аналогично формулируются ГУ на бесконечно тонких магнитных листах:

$$\widehat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0;$$
$$\widehat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = Y_s^m \widehat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1),$$

где Y_s^m — магнитная поверхностная проводимость в сименсах на квадрат. Эти граничные условия позволяют приближенно учитывать наличие тонких диэлектрических и магнитных пленок в расчетной области [178]. В первом случае эквивалентное поверхностное сопротивление

$$Z_s^e = R = \frac{\eta_0}{\mathrm{i}k_0(\varepsilon_r - 1)t},$$

а во втором

$$Y_s^m = G = \frac{1}{\mathrm{i}\eta_0 k_0(\mu_r - 1)t},$$

где t — толщина пленки.

6. Граничные условия на ребре. Поверхности раздела сред часто содержат острые ребра. Поведение электромагнитного поля вблизи таких ребер впервые было исследовано в работах [82, 207]. Более подробно это явление рассмотрено в статье [208]. Авторы этих работ исходили из утверждения, что электромагнитная энергия, запасенная в любом конечном объеме вблизи ребра, должна оставаться конечной. Как было ими показано, для этого любая составляющая векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при приближении к ребру должна расти не быстрее, чем $r^{-1+\tau}$, $\tau > 0$:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} = O(r^{\tau-1}), \quad r \to 0, \tag{1.4.12}$$

где r — расстояние от ребра до точки наблюдения. Величина τ определяется электрофизическими свойствами сред, образующих ребро, и формой поверхностей раздела.

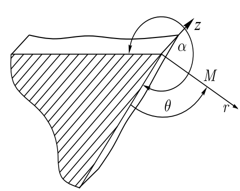


Рис. 1.1. К расчету поля вблизи ребра

В качестве примера, имеющего важное практическое значение, рассмотрим гармонически зависящее от времени поле вблизи ребра, образованного идеально проводящими плоскостями $\theta = 0$, $\theta = \alpha$, граничащими с однородным изотропным диэлектриком (рис. 1.1). Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, совместив ось z с линией ребра. Предполагаем, что в расчетной области V сторонние токи и заряды отсутствуют. Рассмотрим поле Н-типа вблизи ребра, описываемое магнитным вектором Герца, причем будем считать, для простоты, что поле не зависит от координаты z ($\partial\mathbf{\Gamma}^m/\partial z = 0$). В этом случае для описания электромагнитного поля достаточно использовать одну проекцию вектора Герца, направленную вдоль ребра: $\dot{\mathbf{\Gamma}}^m = \Psi\widehat{\mathbf{z}}$. Скалярная функция $\Psi(r,\theta)$ должна удовлетворять уравнению (1.3.29) с граничными условиями

$$\Psi(r,0) = 0, \quad \Psi(r,\alpha) = 0. \tag{1.4.13}$$

Частное решение уравнения (1.3.29) имеет вид

$$\Psi_\nu(r,\theta) = J_\nu(kr)(B_\nu\cos(\nu\theta) + C_\nu\sin(\nu\theta)). \tag{1.4.14}$$

Для того, чтобы вектор Герца удовлетворял граничным условиям (1.4.13), необходимо положить $B_\nu = 0$, $\nu = m\pi/\alpha$, $m = 0$, ±1, ±2, ...

Вблизи ребра ($kr \ll 1$) справедливо соотношение

$$J_\nu(kr) \approx \frac{(kr/2)^\nu}{\Gamma(1+\nu)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Используя это приближение, можно записать решение уравнения (1.4.14) в следующем виде:

$$\Psi(r,\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m r^{m\pi/\alpha}\sin(m\pi\theta/\alpha). \tag{1.4.15}$$

Подставив это решение в (1.3.32), (1.3.33) и учитывая, что $\partial\Gamma^m/\partial z = 0$, найдем электромагнитное поле Н-типа вблизи ребра:

$$E_r = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m\pi/\alpha) D_m r^{m\pi/\alpha - 1}\cos(m\pi/\alpha); \tag{1.4.16}$$

$$E_\theta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m\pi/\alpha) D_m r^{m\pi/\alpha - 1}\cos(m\pi/\alpha); \tag{1.4.17}$$

$$H_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m r^{m\pi/\alpha}\cos(m\pi/\alpha), \tag{1.4.18}$$

где $D_m = C_m/(2^m m!)$. Сравнив полученные выражения с условием (1.4.12), найдем, что оно выполняется, если $D_m = 0$ для всех $m \leqslant 0$ и

$$\tau = \pi/\alpha. \tag{1.4.19}$$

Как видно, вектор Герца и напряженность магнитного поля не имеют особенностей вблизи ребра, в то время как поперечные составляющие электрического поля имеют особенность на ребре при $\alpha > \pi$. Проведя аналогичные вычисления для поля электрического типа, найдем, что поперечные составляющие магнитного поля обращаются в бесконечность на ребре при $\alpha > \pi$. Таким образом, в общем случае поперечные составляющие электромагнитного поля имеют особенность на ребре, если угол между образующими ребро проводящими поверхностями тупой. Продольные составляющие полей в любом случае остаются конечными на ребре. Более общий случай, когда ребро образовано несколькими кусочно-однородными средами, рассмотрен в работе [208].

7. Условия излучения. Если расчетная область не ограничена, необходимо определить характер поведения поля на большом расстоянии от источников. Это можно сделать, считая, что энергия поля должна быть конечной, т. е. выполняется неравенство (1.4.1). Отсюда следует, что напряженность электрического и магнитного полей должна убывать на бесконечности быстрее, чем $1/r$. Математическую формулировку этого утверждения называют *условиями излучения Зоммерфельда*:

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ r \left[\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - \sqrt{\varepsilon\mu}\, \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \right] \right\} = 0. \tag{1.4.20}$$

Для выполнения этих условий среда, в которой существует электромагнитное поле, должна быть хотя бы слабо диссипативной. В частотной области условия излучения Зоммерфельда принимают следующий вид:

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ r \left[\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} - \mathrm{i}k \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \right] \right\} = 0. \tag{1.4.21}$$

1.5. Абсорбционные граничные условия

1.5.1. Основные типы абсорбционных граничных условий. *Абсорбционные* (или радиационные) *граничные условия* (АГУ) необходимы при постановке внешних задач электродинамики. Многие численные методы не позволяют рассчитывать поле в неограниченной области. В этих случаях расчетная область искусственно ограничивается некоторой поверхностью, достаточно далеко отстоящей от всех рассматриваемых объектов. Искусственная граничная поверхность должна поглощать всю энергию поля падающей на нее изнутри волны, ничего не отражая обратно и тем самым моделируя условия излучения Зоммерфельда (1.4.20) или (1.4.21).

Абсорбционные граничные условия можно разделить на две группы [220] — условия, аннигилирующие вытекающие волны, и условия, аппроксимирующие уравнение волны, распространяющейся только в одном направлении.

В первом типе условий используется аннигилирующий дифференциальный оператор. Этот оператор должен заменить волны, реально исходящие из расчетной области, некоторыми соотношениями на ее границе. Он основан на уничтожении одного или нескольких членов в разложении, описывающем решения волнового уравнения в дальней зоне. Условия излучения Зоммерфельда, в частности, уничтожают первый член в этом разложении. Чтобы доказать это, рассмотрим решение скалярного волнового уравнения

$$\nabla^2 U - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{1.5.1}$$

где $u = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Радиационное решение уравнения (1.5.1) (т. е. решение, описывающее волны, распространяющиеся от начала сферической системы координат) может быть записано в виде сходящегося ряда [132]:

$$U(R, \theta, \varphi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j(t - R/u, \theta, \varphi)}{R^j}. \tag{1.5.2}$$

Условие излучения Зоммерфельда во временной области имеет вид

$$\lim_{R\to\infty} R\left(\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0. \tag{1.5.3}$$

Вычислим входящие в эту формулу производные от j-го члена разложения (1.5.2):

$$\frac{\partial f_j}{\partial R} = \frac{-(1/u)f_j' R^j - j f_j R^{j-1}}{R^{2j}} = -\frac{1}{u}\frac{f_j'}{R^j} - j\frac{f_j}{R^{j+1}}; \quad \frac{1}{u}\frac{\partial f_j}{\partial t} = \frac{1}{u}\frac{f_j'}{R^j}.$$

В этих выражениях $f_j' = \partial f_j/\partial\xi$, $\xi = t - R/u$. Таким образом,

$$\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{1}{u}\frac{\partial U}{\partial t} = -j\frac{f_j}{R^{j+1}} = O(R^{-2}).$$

Как видно, в разложении (1.5.2) остаются члены порядка R^{-2}, $R^{-3}, \ldots$, а основной член, содержащий R^{-1}, уничтожается. В дальнейшем были сконструированы операторы, уничтожающие произвольное число членов в разложении для вытекающих волн [70]. АГУ рассмотренного типа применяются, в основном, в задачах дифракции для точного моделирования рассеянного поля в дальней зоне.

Второй тип АГУ, основанный на использовании «однонаправленного волнового уравнения», применяется наиболее часто. Рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0,$$

имеющее решение в виде суперпозиции волн, распространяющихся в противоположных направлениях оси x. Это уравнение можно представить в виде произведения двух множителей:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t} - u\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial a}{\partial t} + u\frac{\partial a}{\partial x}\right) = 0, \qquad (1.5.4)$$

каждый из которых описывает распространение волны только в одном направлении. Уравнения

$$\frac{\partial a}{\partial t} - u\frac{\partial a}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial a}{\partial t} + u\frac{\partial a}{\partial x} = 0 \qquad (1.5.5)$$

называют однонаправленными волновыми уравнениями. Выполнение, например, первого равенства (1.5.5) на границе $x = \mathrm{const}$ обеспечивает полное поглощение волны, распространяющейся в сторону положительных значений оси x, поэтому данное уравнение можно рассматривать как точное абсорбционное граничное условие.

1.5.2. Двухмерные АГУ. Факторизация, подобная (1.5.4), может быть проделана и с волновыми уравнениями большей размерности. Например, оператор двухмерного волнового уравнения $\mathscr{L} = D_x^2 + D_y^2 - D_t^2$, где $D_x = \partial/\partial x$, $D_y = \partial/\partial y$, $D_t = \partial/\partial(ut)$ может быть факторизован следующим образом:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^+\mathscr{L}^-,$$

где $\mathscr{L}^\pm = D_x \pm D_t\sqrt{1 - S^2}$, $S = D_y/D_t$. В работе [119] показано, что применение оператора $\mathscr{L}^-$ к волновой функции на границе $x = \mathrm{const}$ приводит к полному поглощению волны, падающей под любым углом на границу и распространяющейся в сторону отрицательных значений оси x. Таким образом, выражение $\mathscr{L}^- U = 0$ можно рассматривать как точное АГУ для левой границы расчетной области. Аналогично, оператор $\mathscr{L}^+$ реализует АГУ на правой границе области.

Впервые локальные АГУ различного порядка для двухмерных гиперболических уравнений были сформулированы в работах [119, 120]. Для вывода простейших условий этого типа (1-го порядка аппроксимации) рассмотрим плоскую однородную волну, распространяющуюся в плоскости xOz. Найдем, какие граничные условия надо задать на плоскости $z = \text{const}$, чтобы волна прошла через эту поверхность без отражений. Поле волны описывается выражением

$$a = a_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x x + k_z z)},$$

где a — любая составляющая электромагнитного поля волны, $k_x = k\cos\varphi$, $k_z = k\sin\varphi$, φ — угол между направлением распространения волны и осью x. Вычислив производную от этого выражения по x, получим

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\mathrm{i}k_x a = -\mathrm{i}ka\cos\varphi. \tag{1.5.6}$$

Выражение (1.5.6) есть точное абсорбционное граничное условие для угла падения φ. К сожалению, это условие невозможно использовать в численном анализе, так как угол падения заранее не известен. Положив этот угол равным нулю, получим *приближенное АГУ Паде первого порядка* [220]:

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \mathrm{i}ka = 0. \tag{1.5.7}$$

Коэффициент отражения R от поверхности, на которой задано это условие, зависит от угла падения следующим образом:

$$R = \frac{\cos\varphi - 1}{\cos\varphi + 1}.$$

Для вывода более точных АГУ перепишем уравнение (1.5.7) следующим образом:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\mathrm{i}\sqrt{k^2 - k_z^2}\; a = -\mathrm{i}ka\sqrt{1 - \left(\frac{k_z}{k}\right)^2}. \tag{1.5.8}$$

Полагая $(k_z/k)^2 \ll 1$, разложим квадратный корень в последнем выражении в ряд Тэйлора, ограничившись двумя первыми членами разложения:

$$\frac{\partial a}{\partial x} \approx -\mathrm{i}k\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{k_z}{k}\right)^2\right] a = -\mathrm{i}ka + \mathrm{i}\frac{1}{2k}k_z^2 a. \tag{1.5.9}$$

Так как $\partial^2 a/\partial z^2 = -k_z^2 a$, выражение (1.5.9) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - \mathrm{i}k\frac{\partial a}{\partial x} + k^2 a = 0. \tag{1.5.10}$$

Уравнение (1.5.10) называют *абсорбционным граничным условием Паде второго порядка*. Соответствующий коэффициент отражения определяется формулой

$$R = \frac{\cos\varphi + 0{,}5\sin^2\varphi - 1}{\cos\varphi - 0{,}5\sin^2\varphi + 1} \qquad (1.5.11)$$

и также обращается в нуль при $\varphi \to 0$.

Зависимость коэффициента отражения от угла падения показана на рис. 1.2. Как видно, приемлемое значение модуля коэффициента отражения ($|R| < 0{,}05$) наблюдается только при углах падения, не превышающих 30°для АГУ 1-го порядка и 50°для АГУ 2-го порядка.

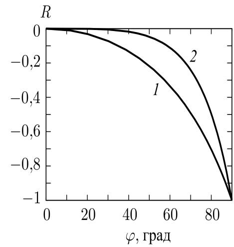


Рис. 1.2. Зависимость коэффициента отражения от угла падения для двухмерного АГУ. *1* — АГУ 1-го порядка, *2* — АГУ 2-го порядка

В более общем виде уравнение (1.5.10) может быть записано следующим образом:

$$p_2\frac{\partial^2 a}{\partial z^2} - \mathrm{i}k\frac{\partial a}{\partial x} + p_0 k^2 a = 0. \qquad (1.5.12)$$

Выражение (1.5.12) называют *обобщенным абсорбционным граничным условием второго порядка* (ОАГУ). Коэффициент отражения для этого типа АГУ определяется выражением

$$R = \frac{\cos\varphi + p_2\sin^2\varphi - p_0}{\cos\varphi - p_2\sin^2\varphi + p_0}. \qquad (1.5.13)$$

Подбирая коэффициенты p_0 и p_2, можно сдвигать положение минимума коэффициента отражения и регулировать форму зависимости $R(\varphi)$. В табл. 1.1 приведены некоторые значения указанных коэффициентов и соответствующие значения углов полного пропускания φ_0. Графики зависимостей коэффициента отражения от угла падения для этих вариантов обобщенного АГУ показаны на рис. 1.3. Как видно, подбором коэффициентов можно увеличить диапазон значений угла падения, в котором коэффициент отражения остается достаточно малым, но при этом его значение при малых углах падения сильно возрастает.

Приближенные АГУ более высокого порядка можно получить, сохраняя большее число членов в разложении квадратного корня, входящего в уравнение (1.5.8) [178].

Рассмотренные типы АГУ применимы, строго говоря, только к плоским поверхностям. Если поверхность, на которой они заданы, имеет кривизну, погрешность граничных условий