Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Высшая школа экономики и менеджмента

С. Э. НОХРИН

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Конспект лекций



Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Курс лекций

Рекомендовано методическим советом УрФУ
для студентов, обучающихся по направлениям
080100.62 — Экономика, 080200.62 — Менеджмент,
230700.62 — Прикладная информатика,
080500.62 — Бизнес-информатика

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 51-7:330(075.8)
ББК 22.1я73+65я73
Н85

Составитель — С. Э. Нохрин

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук *А. В. Осипов* (Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского);
канд. физ.-мат. наук, доц. *С. А. Ануфриенко* (Специализированный учебно-научный центр УрФУ)
Научный редактор — канд. физ.-мат. наук *О. Я. Шевалдина*

Нохрин, С. Э.

Н85 Математика для экономистов : курс лекций / сост. С. Э. Нохрин. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 120 с.
ISBN 978-5-7996-1251-1

Пособие состоит из лекций, читаемых в процессе курса «Математика для экономистов» для студентов первого курса технических специальностей. Пособие может быть использовано для самостоятельного изучения предмета и для ликвидации пробелов в курсе алгебры средней школы.

Подготовлено кафедрой «Моделирование управляемых систем»

Библиогр.: 5 назв. Табл. 1. Рис. 17.

УДК 51-7:330(075.8)
ББК 22.1я73+65я73

ISBN 978-5-7996-1251-1

© Уральский федеральный университет, 2014

ЛЕКЦИЯ I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Понятие множества

Множество — есть понятие неопределяемое. Его можно трактовать как некоторый набор объектов. Эти объекты называются *элементами* множества. Множество считается заданным, если про каждый объект можно сказать, является он элементом данного множества или не является. Так, можно говорить о множестве студентов УрФУ, о множестве треугольников, лежащих в данной плоскости или о множестве решений какого-либо уравнения. В последнем случае заметим, что совершенно неважно, умеем мы решать указанное уравнение или нет; множество его корней определено однозначно и может являться предметом математического исследования.

Поведение множеств описывается с помощью аксиом теории множеств. Общепринятая в математике система аксиом теории множеств — *аксиомами Цермело Френкеля*. Эта система обозначается ZFC. К этой системе аксиом, как правило, добавляется так называемая *аксиома выбора*. В настоящем курсе мы не будем вникать в тонкости аксиоматики; желающие могут подробно ознакомиться с нею, изучив соответствующую литературу, например, «Справочную книгу по математической логике» (часть 2 под редакцией Дж. Барвайса).

Для обозначения множеств применяются заглавные латинские буквы (с индексами или без них), например A, B_{12} или T_n. Аналогично, элементы множеств, как правило, будут обозначаться строчными латинскими буквами (возможно, также с индексами). Следует отметить, что сами множества также могут являться элементами каких-то множеств, например, любая прямая — это некоторое множество точек, поэтому когда мы говорим о множестве прямых, то имеем множество, элементами которого являются другие множества. Факт, что некоторый объект a является элементом множества A записывается в виде $a \in A$ ($A \ni a$), что читается как «a лежит в A» («A имеет a своим элементом»). Аналогично записи $a \notin A$ и $A \not\ni a$ («a не лежит в A» и «A не содержит a в качестве элемента») означают, что объект a не есть элемент множества A.

Множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же

элементов. Факт, что множества A и B равны записывается так: $A = B$. Если каждый элемент множества A является элементом множества B (запись $A \subset B$ или $B \supset A$), то говорят, что множество A является подмножеством множества B. Из вышесказанного ясно, что $A = B$ в том и только том случае, когда одновременно выполнены оба включения $A \subset B$ и $B \subset A$.

В некоторых книгах для обозначения упомянутых выше включений употребляются символы $\subseteq$ и $\supseteq$, а символы $\subset$ и $\supset$ означают строгое включение множеств, исключающее их совпадение. Нам нет необходимости разделять случаи строгого и нестрогого включений, поэтому символы $\subseteq$ и $\supseteq$ нами использоваться не будут.

Замечание. Несмотря на внешнюю похожесть записей $B \in A$ и $B \subset A$, их смысл совершенно различный. Так, если A — множество цифр, применяемых в десятичной системе счисления, а B — множество чётных таких цифр, то запись $B \subset A$ будет верной, а запись $B \in A$ — неверной. Легко привести и обратный пример.

Если множество задано перечислением своих элементов, то эти элементы записываются в фигурных скобках через запятую. Так, множества A и B из предыдущего замечания записываются как $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ соответственно. Разумеется, задать таким образом можно очень небольшой процент множеств. Чтобы обойти эту трудность, часто поступают так: вместо описываемого множества A указывают некоторое другое, известное множество, содержащее A, и задают некоторое правило P, которому должны соответствовать те и только те элементы указанного множества, которые и образуют A. Математической запись здесь такова: в фигурных скобках записывается, что переменная принадлежит указанному большему множеству, а далее через двоеточие (или иногда через вертикальную черту) указывают правило P. Например, запись $\{x \in \mathbf{R} : x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$ означает подмножество вещественных чисел, которые можно представить как отношение целого числа к натуральному — из курса средней школы вам известно, что такие числа называются *рациональными*. Иногда, если из контекста ясно, о чём идёт речь, объем-

лющее множество может и не указываться; например, вполне корректна запись $\mathbf{Q} = \{x :\ x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$.

Упражнение 1. Совпадают ли множества A и B, если

а) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{2, 1, 3\}$;

б) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 2, 3, 1\}$;

в) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{\{1, 2\}, 3\}$?

Существует ряд множеств, для которых исторически закреплены стандартные обозначения. Вот некоторые из них: $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbf{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел, $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbf{C}$ — множество комплексных чисел, $\mathbf{R}^2$ — множество точек плоскости, $\mathbf{R}^3$ — множество точек пространства и т. д.

Упражнение 2. Совпадают ли множества A и B, если

а) $A = \{x \in \mathbf{Z} :\ x = 3n,\ n \in \mathbf{Z}\},\ B = \{x \in \mathbf{Z} :\ x = 3n + 6,\ n \in \mathbf{Z}\}$;

б) $A = \{x \in \mathbf{Z} :\ x = 3n,\ n \in \mathbf{N}\},\ B = \{x \in \mathbf{Z} :\ x = 3n + 6,\ n \in \mathbf{N}\}$;

в) $A = \mathbf{Q},\ B = \{x \in \mathbf{R} :\ x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbf{N},\ n \in \mathbf{Z}\}$?

Особо надо сказать о *пустом множестве* (обозначается $\emptyset$). Так называют множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество единственно. Оно является подмножеством любого множества, т. е. для любого A справедливо включение $A \supset \emptyset$. Вопрос о том, является ли то или иное множество пустым или нет, является одним из основных вопросов математики; так вопрос о совместности системы уравнений есть вопрос о непустоте множества её решений. Обратим внимание на то, что множества $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$ различны: первое из них не содержит элементов, а второе содержит единственный элемент — пустое множество.

Упражнение 3. Выпишите все подмножества следующих множеств:

а) $\{t,\ s\}$, б) $\{2,\ 5,\ \text{ъ}\}$, в) $\{\emptyset\}$, г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Существует специальное обозначение для множества всех подмножеств некоторого множества A. Оно таково: 2^A. Математическая запись этого множества такая: $2^A = \{B : \ B \subset A\}$. Например, если множество A — множество цифр, используемых в двоичной системе счисления, (т. е. если $A = \{0, 1\}$), то $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, A\}$. Обращаем особое внимание, что здесь не идёт речь о возведении числа 2 в степень A, запись 2^A — просто обозначение некоего множества. Объяснение же такому обозначению таково: оказывается (позже мы это докажем), что если множество A состоит из n элементов (n — натуральное число), то множество 2^A состоит из 2^n элементов ровно.

2. Операции над множествами

Основными операциями над множествами являются объединение, пересечение и разность.

Определение 1. *Пересечением* множеств A и B называют множество, элементами которого являются все элементы, которые принадлежат одновременно множествам A и B и только они.

Определение 2. *Объединением* множеств A и B называют множество, элементами которого являются все элементы, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B и только они.

Пересечение и объединение множеств обозначаются символами $\cap$ и $\cup$ соответственно. С учётом этого, определения могут быть переписаны следующим образом:

$A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$,

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Для наглядности представления этих операций используются так называемые *диаграммы Венна*, в которых множества, над которыми производится операция, изображаются в виде кругов на плоскости. При этом

элементами множества считаются все точки, лежащие внутри или на границе круга, соответствующего данному множеству, а результат операции закрашивается. На рис. 1 и рис. 2 соответственно представлены диаграммы Венна для объединения и пересечения двух множеств.

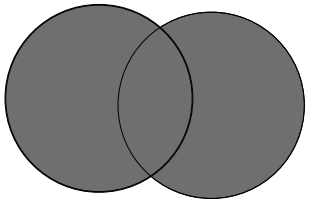


Рис. 1. Объединение двух множеств

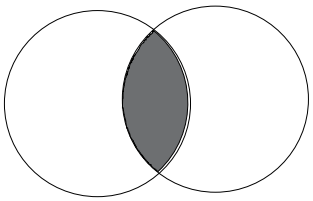


Рис. 2. Пересечение двух множеств

Операции объединения и пересечения двух множеств легко распространяются на случай произвольного (в том числе и бесконечного) числа множеств:

Определение $1'$***.*** *Объединением* семейства множеств A_α называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_α.

Определение $2'$***.*** *Пересечением* семейства множеств A_α называют множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому множеству A_α.

Для теоретико-множественной записи этих определений используются так называемые *кванторы*. Их два: *квантор всеобщности* и *квантор существования*.

Квантор всеобщности имеет вид $\forall$. Это замена русских слов «любой», «каждый», «всякий» и их синонимов. Например, утверждение, что 1 — самое маленькое натуральное число, с помощью квантора всеобщности записывается так:

$$\forall x \in \mathbf{N}\ 1 \leqslant x.$$

Квантор существования имеет вид $\exists$. Это замена русских слов «имеется», «существует», «найдётся» и их синонимов. Например, утверждение,

что многочлен $P(x)$ имеет корни, с помощью квантора существования записывается так:

$$\exists a\ P(a) = 0.$$

В современной математике кванторы общности и существования встречаются постоянно, практически во всех разделах. Неоднократно они будут встречаться и нам. Покажем, например, как с их помощью записываются определения пересечения и объединения совокупности множеств:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha = \{x : \exists\alpha(x \in A_\alpha)\}, \qquad \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \{x : \forall\alpha(x \in A_\alpha)\}.$$

Упражнение 4. Что представляют собой множества
а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(1/n;\ n)$; б) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[-n;\ 1/n]$?

Отметим, что с пересечением и объединением множеств вы сталкивались в курсе алгебры средней школы, а именно при решении систем и совокупностей. Рассмотрим, например, систему нескольких уравнений от одного переменного x. Для каждого входящего в систему уравнения имеются свои числа x, ему удовлетворяющие; эти числа образуют множество решений уравнения. Системе удовлетворяют числа x, удовлетворяющие каждому из уравнений, т. е. множеством решений системы является пересечение множеств решений входящих в систему уравнений. Аналогично, множество решений совокупности есть объединение множеств решений входящих в совокупность уравнений и неравенств.

Определение 3. *Разностью* множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B (рис. 3). Математическая запись этого определения такова: $A \setminus B = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$.

Упражнение 5. Верно ли, что из того, что $A \setminus B = \emptyset$ следует, что $A = B$?

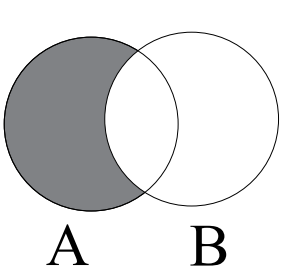


Рис. 3. Разность $A \setminus B$

В отличие от операций объединения и пересечения, операция разности множеств несимметрична: $A \setminus B \neq B \setminus A$. Кроме того, она не распространяется на случай более, чем двух множеств.

Упражнение 6. Для каких пар множеств A, B всё же имеет место равенство $A \setminus B = B \setminus A$?

Часто имеет смысл рассматривать некоторое «максимальное» множество, которое содержит в себе все рассматриваемые. В качестве такого объекта подошло бы, например, множество всех множеств, т. е. множество, элементами которого являются всевозможные множества. Однако оказывается, что такого множества в природе не существует, точнее, *совокупность всех множеств множеством не является* (этот факт в настоящем курсе мы доказывать не будем). Такую совокупность в теории множеств называют *универсум*. Поскольку универсум не есть множество, математика работать с ним не может. Вместо универсума математики рассматривают некий его аналог — *универсальное множество*, т. е. множество, которое содержит все множества, возникающие при решении данной задачи. Как видно, это множество зависит от конкретного раздела математики, в котором решается та или иная задача. Например, в теории делимости универсальным множеством может считаться $\mathbf{N}$ (или $\mathbf{Z}$), в планиметрии — $\mathbf{R}^2$ и т. д. Для универсального множества зарезервировано обозначение U. На диаграммах Венна его изображают в виде прямоугольника, внутри которого изображаются кругами все другие множества.

Определение 4. *Дополнением* множества A (обозначение $\overline{A}$) называется разность $U \setminus A$.

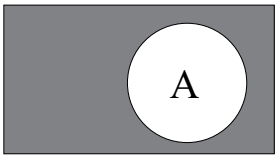


Рис. 4. Дополнение до множества A — это закрашенная область

Ниже приведена диаграмма Венна для операции дополнения (рис. 4).

В некоторых разделах математики (например, в теории меры) полезна операция симметрической разности двух множеств.

Определение 5. *Симметрической разностью* множеств A и B (обозначение $A \triangle B$) называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B.

На языке теории множеств определение выглядит следующим образом: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Упражнение 7. Постройте диаграмму Венна для симметрической разности и докажите, что $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

3. Алгебра множеств

Рассмотренные в предыдущем пункте операции обладают многочисленными свойствами, которые называются *формулами теории множеств*. Каждая из этих формул выглядит как равенство двух множеств, причём это равенство верно независимо от того, какие конкретные множества обозначены буквами, входящими в формулу. Набор всех таких формул называется *алгеброй множеств*. Ясно, что алгебра множеств состоит из бесконечного числа формул. Некоторые из них считаются основными, поскольку выражают ключевые свойства введённых операций. Все другие формулы могут быть выведены последовательным применением каких-либо из основных формул. Приведём основные формулы теории множеств.

1) $A \cup A = A$; 2) $A \cap A = A$; 3) $A \cup \emptyset = A$; 4) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
5) $A \cap U = A$; 6) $A \cup U = U$; 5) $\overline{U} = \emptyset$; 6) $\overline{\emptyset} = U$.

Эти свойства совершенно очевидны: они следуют из определения операций объединения, пересечения и дополнения.

7) $\overline{\overline{A}} = A$.

Формула 7 имеет специальное название: закон двойного дополнения. Она тоже практически очевидна: $\overline{A}$ — это все элементы, которые не входят в множество A, поэтому $\overline{\overline{A}}$ — это те и только те элементы, которые не входят в множество $\overline{A}$, а эти элементы и составляют множество A.

8) $A \cup B = B \cup A$; 9) $A \cap B = B \cap A$;
10) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; 11) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Формулы 8 и 9 выражают перестановочность объединяемых (пересекаемых) множеств. Это очевидное свойство операций объединения и пересечения называется *коммутативностью*. Формулы 10 и 11 говорят, что порядок объединения (пересечения) не важен; так называемая, *ассоциативность* этих операций.

Заметим, что понятия коммутативности и ассоциативности вам известны из курса средней школы: это переместительный и сочетательный закон, которому удовлетворяют также обычные операции сложения и умножения чисел. Если в формулах 8 — 11, а также в формулах 3 и 4 формально заменить множества на числа, символ $\cup$ на $+$, символ $\cap$ на $\cdot$, а пустое множество считать нулём, мы получим хорошо известные со школы правила арифметики. Эта закономерность привела к тому, что операцию объединения двух множеств часто называют теоретико-множественным сложением, а пересечения — теоретико-множественным умножением. Однако далеко не все формулы теории множеств имеют такой арифметический аналог (например, формула 1 при приведённой выше трактовке получила бы вид $a + a = a$ — равенство совершенно неверное).

12) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; 13) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.